

## UMA APLICAÇÃO DE UM MODELO MULTI-HUBBERT MODIFICADO PARA A ELABORAÇÃO DE CENÁRIOS DE PRODUÇÃO DE PETRÓLEO NO BRASIL

Tiago Abilio Saraiva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Planejamento Energético, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Planejamento Energético.

Orientadores: Alexandre Salem Szklo

André Frossard Pereira de Lucena

Rio de Janeiro

Abril de 2013

UMA APLICAÇÃO DE UM MODELO MULTI-HUBBERT MODIFICADO PARA A  
ELABORAÇÃO DE CENÁRIOS DE PRODUÇÃO DE PETRÓLEO NO BRASIL

Tiago Abilio Saraiva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM  
PLANEJAMENTO ENERGÉTICO.

Examinada por:

---

Prof. Alexandre Salem Szklo, D.Sc.

---

Prof. André Frossard Pereira de Lucena, D.Sc.

---

Prof. Helder Queiroz Pinto Junior, Ph.D.

---

Prof. Virgílio José Martins Ferreira Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2013

Saraiva, Tiago Abilio

Uma aplicação de um modelo multi-hubbert modificado para a elaboração de cenários de produção de petróleo no Brasil / Tiago Abilio Saraiva. - Rio de Janeiro: UFRJ / COPPE, 2013.

XI, 117 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Alexandre Salem Szklo

André Frossard Pereira de Lucena

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Planejamento Energético, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 98 -106

1. Estimacões. 2. Producao. 3. Brasil. I. Szklo, Alexandre Salem. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Planejamento Energético. III. Título.

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, a minha avó, a toda minha família e meus orientadores, que pacientemente me ajudaram a vencer os obstáculos e concluir mais esta etapa.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos professores Alexandre Salem Szklo e André Frossard Pereira de Lucena, pela atenção, orientação e tempo despendidos durante todo esse ano fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos professores Helder Queiroz Pinto Junior e Virgílio José Martins Ferreira Filho, por aceitarem o convite para participar da banca e por colaborarem no aperfeiçoamento da dissertação.

Aos amigos que conheci e convivi nesse período no PPE.

Aos funcionários do PPE, pela atenção e auxílio conferido durante todo o período do Mestrado e a CAPES, pelo auxílio financeiro.

A todos os professores do PPE, que compartilharam conhecimento e experiências profissionais.

Aos meus queridos pais Maria de Jesus Abilio Nogueira e Jose Manuel Gomes Saraiva, pelo carinho e esforço que desprenderam até esse momento da minha formação.

A memória da minha querida avó Alice Pereira Gomes, que infelizmente não poderá compartilhar desse momento importante da minha vida, que ela com muito carinho ajudou a construir.

A todos meus amigos, os quais sempre pude contar para todos os momentos e me apoiaram com grande admiração durante esse período.

E acima de tudo ao amor, pois é com ele que todas as energias positivas me conduzem a realizar grandes tarefas e cumprir grandes objetivos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

## UMA APLICAÇÃO DE UM MODELO MULTI-HUBBERT MODIFICADO PARA A ELABORAÇÃO DE CENÁRIOS DE PRODUÇÃO DE PETRÓLEO NO BRASIL

Tiago Abilio Saraiva

Abril/ 2013

Orientadores: Alexandre Salem Szklo

André Frossard Pereira de Lucena

Programa: Planejamento Energético

O petróleo é a principal fonte de energia primária do mundo. Este recurso não possui atualmente uma taxa de reposição compatível com sua taxa de extração. As metodologias para realizar previsões da curva de produção do petróleo são variadas, porém, para um país produtor *price-taker*, como o Brasil, a literatura científica indica ser apropriado realizar estimativas com a metodologia Hubbertiana. Este trabalho consiste em estimar o perfil da produção de petróleo do Brasil, bem como encontrar o pico de produção para diferentes cenários de últimas reservas recuperáveis. Foi utilizado um modelo multi-Hubbert modificado, que permite aprimorar a modelagem clássica tanto em termos de simulação de mais de um ciclo produtivo quanto em termos da análise dos efeitos de informação e/ou de depleção. Nesse estudo foram testados três diferentes níveis de produção para reservas *onshore* e pós-sal: P95; P50 e P5, que resultaram em picos de produção de 2,37 MMbbl/d em 2015; 3,33 MMbbl/d em 2022 e 6,59 MMbbl/d em 2035, respectivamente. Os desvios médios do modelo em relação aos dados observados não superaram 3% e as projeções corroboraram resultados de outros estudos. Também foram testados, a guisa de exemplo, três cenários hipotéticos considerando diferentes níveis de reservas para o pré-sal: 30; 50 e 100 bilhões de barris. Neste caso, obtiveram-se picos de produção de 4,85 MMbbl/d em 2027; 5,4 MMBBL/d em 2034 e 8,24 MMbbl/d em 2047, respectivamente. Foi ainda observada a característica usual de uma curva multi-Hubbert modificada, que permite o alongamento da curva de produção e realiza um melhor ajuste dos dados estimados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

AN APPLICATION OF A MULTI-HUBBERT MODIFIED MODEL FOR THE  
ESTABLISHMENT OF SCENARIOS OF OIL PRODUCTION IN BRAZIL

Tiago Abilio Saraiva

April/ 2013

Advisors: Alexandre Salem Szklo  
André Frossard Pereira de Lucena

Department: Energy Planning

Different methodologies have been applied to forecast oil production curves in many regions or countries. Usually, the scientific literature indicates that curve-fitting models, especially the classic approach of Hubbert, are a simple and suitable tool for first-order projections of future production. This is particularly true for country analysis, where the data for recoverable reserves (URR) are very uncertain and producers are price-takers. This study estimated Brazil's oil production curves, according to different URR scenarios (P95, P50 and P5), applying a modified multi-Hubbert model. This model improved the classic methodology by adding productive cycles and allowing the revision of the assumption that production rate is strictly proportional to the first power of both depletion and information effects. Findings show that, without considering the recent discoveries in pre-salt layers, Brazil's peak oil should hover between 2,37 MMbbl/d (2015), 3,33 MMbbl/d (2022) and 6,59 MMbbl/d (2035), depending on URR scenarios. The accuracy of the fitting related to the observed data from 1954 to 2012 gave a relative standard deviation of less than 5%. Considering pre-salt contingent resources, Brazil's peak oil would be fatter and range from 4,85 MMbbl/d (2027) to 8.24 MMbbl/d (2047) depending on the hypothesis made. This result is highly speculative.

## Índice

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 – Introdução .....                                                                    | 1   |
| 2 – Modelos Aplicados à Produção de Petróleo: revisão teórica .....                     | 5   |
| 2.1.    Conceitos: recursos e reservas .....                                            | 5   |
| 2.2.    A Regra de Hotelling:.....                                                      | 11  |
| 2.3.    Descrição dos modelos: <i>Bottom up</i> e Dinamica de sistemas .....            | 13  |
| 2.3.1.    A modelagem <i>Bottom-up</i> :.....                                           | 13  |
| 2.3.2.    Dinâmica de Sistemas.....                                                     | 16  |
| 2.4    Descrição de modelos <i>top down</i> : .....                                     | 20  |
| 2.4.1.    Modelo <i>R/P</i> :.....                                                      | 20  |
| 2.4.2.    Modelos Econométricos .....                                                   | 23  |
| 3 – Considerações Teóricas e Metodológicas sobre o Modelo de Hubbert.....               | 30  |
| 3.1.    A descrição do modelo clássico de Hubbert: .....                                | 30  |
| 3.2.    Outras formas de utilização da curva de Hubbert: .....                          | 42  |
| 3.3.    A descrição da curva Multi-Hubbert: .....                                       | 48  |
| 4 – Aplicação de um Modelo Multi-Hubbert modificado à Produção Brasileira de Petróleo.. | 57  |
| 4.1.    Aspectos Metodológicos .....                                                    | 57  |
| 4.2.    Base de Dados para Simulação de Cenários .....                                  | 60  |
| 4.3.    Resultados de cenários para os ciclos <i>onshore</i> e pós-sal .....            | 65  |
| 4.4.    Discussão .....                                                                 | 77  |
| 4.5.    Um exercício preliminar para o pré-sal .....                                    | 79  |
| 5 – Considerações Finais e Recomendações de Estudos Futuros.....                        | 90  |
| Referências Bibliográficas.....                                                         | 94  |
| Apêndices .....                                                                         | 103 |
| Anexo .....                                                                             | 106 |



## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Princípio da classificação do recurso .....                                                                                                               | 7  |
| Figura 2: A estrutura de produção de a modelagem <i>Bottom-up</i> .....                                                                                             | 14 |
| Figura 3: Diagrama das descobertas físicas da dinâmica de sistemas. ....                                                                                            | 17 |
| Figura 4: Consumo das reservas mundiais segundo Bentley.....                                                                                                        | 22 |
| Figura 5: Dados observados para o período; dados gerados por um modelo físico simples e dados gerados por um modelo híbrido.....                                    | 27 |
| Figura 6: Produção de petróleo bruto nos Estado Unidos desenhado em uma escala semilogarítmica:.....                                                                | 31 |
| Figura 7: Relação envolvendo um ciclo completo de produção de qualquer recurso exaurível .....                                                                      | 33 |
| Figura 8: Última produção de petróleo norte-americana baseado em reservas iniciais assumidas em 150 e 200 bilhões de barris: .....                                  | 34 |
| Figura 9: Descobertas e Produção acumuladas e reservas provadas:.....                                                                                               | 37 |
| Figura 10: Taxas de Descoberta, Produção e Mudança nas Reservas Provadas: .....                                                                                     | 38 |
| Figura 11: Modelos de previsões da produção mundial de petróleo, com separações dos principais produtores: modelos estático e dinâmico. ....                        | 44 |
| Figura 12: Ilustração esquemática: A) Curva Gaussiana de Hubbert da produção e B) Curva Gaussiana de Hubbert assimétrica da produção.....                           | 45 |
| Figura 13: Produção de petróleo do campo de <i>Illinois</i> entre os anos de 1905 a 1955.....                                                                       | 48 |
| Figura 14: Curvas de evolução da produção acumulada e da taxa de produção para o caso (a) de uma curva simples e para o caso (b) de uma curva Multi-Ciclo: .....    | 49 |
| Figura 15: Descobertas da Shell: <i>Creaming-Curves</i> entre os anos 1885-1998. ....                                                                               | 52 |
| Figura 16: <i>Creaming-Curve</i> dos 48 campos dos Estados Unidos (EUA – 48), entre os anos de 1900 a 2005 de petróleo e gás.....                                   | 53 |
| Figura 17: <i>Creaming-Curves</i> dos Estados Unidos mais o Canadá, entre os anos 1900 a 2007 para petróleo e gás convencional.....                                 | 54 |
| Figura 18 Produção (milhares de barris por dia) - média anual do Brasil .....                                                                                       | 62 |
| Figura 19: Curva multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR total de 29,10 bilhões de barris de petróleo (exceto recursos do pré-sal)..... | 67 |
| Figura 20: Curva multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 47,75 bilhões de barris de petróleo .....                                   | 69 |
| Figura 21: Curva multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 106,42 bilhões de barris de petróleo (exceto recursos do pré-sal) .....     | 71 |

|                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 22: Curvas multi-Hubbert modificado comparativas em relação a diferentes URR adotados (exceto recursos do pré-sal).....                                    | 74 |
| Figura 23: Curvas multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 77,7 bilhões de barris de petróleo (incluindo recursos do pré-sal).....  | 81 |
| Figura 24: Curvas multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 97,7 bilhões de barris de petróleo (incluindo recursos do pré-sal).....  | 83 |
| Figura 25: Curvas multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 147,7 bilhões de barris de petróleo (incluindo recursos do pré-sal)..... | 85 |
| Figura 26: Curvas multi-Hubbert modificado comparativas em relação a diferentes URR adotados (incluindo recursos do pré-sal) .....                                | 87 |

## ÍNDICE DE TABELAS

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Parâmetros obtidos para a estimação da produção brasileira de petróleo no pós-sal (isto é, sem considerar recursos do pré-sal)..... | 76 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## 1 – Introdução

Em 2011 as fontes fósseis (carvão, gás natural e petróleo) respondiam por cerca de 80% da demanda de energia primária do mundo (BP, 2012). Neste caso, o petróleo se destaca. Conforme os dados apresentados pelo *World Economic Outlook* (IEA, 2011), esta fonte apresentou um consumo de 3.987 milhões de tep<sup>1</sup>, correspondendo a 33% da oferta de energia primária mundial em 2009, enquanto o carvão respondeu por 27% e o gás natural por 20%.

O *World Energy Outlook* (IEA, 2011) também elaborou projeções de consumo mundial das fontes primárias de energia, conforme três diferentes cenários: o primeiro que segue a atual política de incentivos à utilização dos combustíveis fósseis; o segundo, que se baseia em uma nova política de incentivos; e o terceiro que visa atingir a meta de concentração de gases de efeito estufa de 450 ppm<sup>2</sup> na atmosfera. Tais cenários indicam que o petróleo poderá atingir um nível de consumo de: 4.645; 4.992 e 3.671 milhões de tep (Mtep), correspondendo a 27; 27 e 25% de toda a energia primária consumida em 2035, respectivamente para cada cenário. Para o carvão os resultados das projeções foram: 4.101; 5.419 e 2.316 Mtep correspondendo a 24; 30 e 16%; e o gás natural: 3.928; 4.206 e 3.208 Mtep correspondendo a 23; 23 e 22%. Guardadas as diferentes hipóteses e incertezas da modelagem, esses cenários revelam a importância do petróleo para a produção de energia primária mundial e a tendência de que essa característica não deve se alterar pelos próximos 20 anos.

Uma característica importante da indústria mundial de petróleo é o fato de este recurso não possuir, atualmente, uma taxa de reposição compatível com sua taxa de extração. Ademais, os recursos remanescentes de óleo bruto em grande parte das bacias apresentam custos de desenvolvimento e extração superiores aos custos médios de extração e desenvolvimento dos recursos atualmente em produção (MOHR, 2010 e MAUGGERI, 2012), indicando que a curva de custo marginal da produção de petróleo deverá ser crescente. Esta questão remete a autores como HOTELLING (1931), HUBBERT (1956, 1962) e LAHERRERE (1997, 2001, 2003, 2009 e 2012), que discutem em seus trabalhos o ritmo de esgotamento das reservas recuperáveis mundiais de petróleo e a consequente importância de conhecer o volume final das mesmas.

---

<sup>1</sup> Tep - Tonelada equivalente de petróleo.

<sup>2</sup> ppm – Partes Por milhão.

Reserva é entendida como a parte que é conhecida e técnica e economicamente recuperável de um determinado recurso (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007). Já o volume final das reservas, também denominado de Últimas Reservas Recuperáveis (URR) (BRANDT, 2010), consiste na quantidade total de petróleo que será explorada. Ou seja, trata-se da quantidade que já foi anteriormente explorada mais a quantidade que ainda seria produzida até ser atingida a exaustão do produto.

Portanto, dada a importância atual e futura do petróleo para as sociedades e sua característica de ser um recurso finito com tendência de custos marginais crescentes, estudos sobre o comportamento da produção petrolífera são fundamentais para a elaboração de políticas energéticas nos diferentes países produtores e consumidores de petróleo. Diversos autores desenvolveram diferentes abordagens na tentativa de explicar o comportamento de uma curva de produção de petróleo em um país. Por exemplo, alguns trabalhos recentes foram realizados por MOHR (2010), que tentou incorporar ao modelo de Hubbert as interrupções da produção de petróleo, que ocorreram após choques de oferta de petróleo; e por NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH (2010), que utilizaram uma solução partindo de uma equação parabólica da curva de Hubbert, para assim definir seu modelo multi-Hubbert. Por sua vez, LAHERRERE (2009, 2010 e 2012) estimou *Creaming-Curves* para definir as últimas reservas recuperáveis de óleo e gás natural em cada continente e no mundo.

No caso do Brasil estudos anteriores para a modelagem da produção brasileira de petróleo utilizaram curvas simples do modelo clássico de Hubbert (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007) ou curvas multi-Hubbert simples do modelo de Laherrere (FERREIRA, 2005). Enquanto SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) tiveram o cuidado de adotar um procedimento probabilístico rigoroso para estimação de URR, FERREIRA (2005) seguiu uma definição menos rigorosa do URR brasileiro para suas estimativas, concentrando sua análise em reservas medidas, conforme a abordagem determinística de reserva<sup>3</sup>.

Além disso, os estudos supracitados tratam-se de modelagens do tipo *top down* para produção de petróleo, visando estimativas de longo prazo, sem considerar naquele instante a chamada região do pré-sal<sup>4</sup>, que ainda não tinha sido descoberta

---

<sup>3</sup> A definição de reserva será ainda detalhada nesta dissertação.

<sup>4</sup> O conceito técnico de "Pré-sal" se refere a camada do subsolo que fica abaixo da camada de sal existente em algumas bacias sedimentares. Trata-se de um novo horizonte de atuação dado que a

comercialmente. Tratam-se também de estudos baseados nas hipóteses de HUBBERT (1956; 1962) para a modelagem de produção de petróleo. Estas hipóteses consideram, sobretudo, a característica de um produtor *price-taker* e a proporcionalidade entre as descobertas (e consequentemente a produção) acumuladas e os efeitos de informação e depleção (SZKLO et al., 2007).

Dessa forma o objetivo deste estudo consiste em estimar curvas de produção de petróleo no Brasil a partir de um modelo multi-Hubbert modificado baseado em MAGGIO E CACCIOLA (2009, 2012), que permite aprimorar a modelagem hubbertiana tanto em termos de simulação de mais de um ciclo produtivo quanto em termos da análise dos efeitos de proporcionalidade (por exemplo, alargando ou estreitando picos de produção, conforme variações na proporcionalidade dos efeitos de informação e/ou de depleção).

Pretende-se, assim, testar diferentes cenários de produção para variados valores de reservas remanescentes brasileiras de petróleo (URR). Neste caso, primeiramente são identificados ciclos históricos de produção de petróleo no Brasil desde 1954 (período pós-criação da Petrobras) até 2012. Estes ciclos são modelados conforme um modelo multi-hubbert ajustado por um fator  $k$ , que é obtido através da minimização dos desvios quadrados dos resultados do modelo relativamente aos dados observados. Também é proposto um exercício preliminar, especulativo, que considera reservas para águas ultra profundas no pré-sal brasileiro.

Para se alcançar o objetivo proposto, esta dissertação está organizada em quatro capítulos, além desta introdução. No Capítulo 2, é feita uma revisão bibliográfica a respeito dos principais modelos *top down* e *bottom up* aplicados para a previsão de petróleo. Inicialmente o objetivo é realizar uma descrição dos conceitos de reservas e recursos, que são fundamentais para o entendimento dos demais capítulos. Em seguida, é apresentada uma revisão dos principais modelos de previsão do ritmo de produção das reservas recuperáveis de petróleo, iniciando-se com a descrição do modelo de Hotelling, que foi a primeira grande discussão a respeito da exploração de recursos escassos,

---

exploração de petróleo no mundo ocorre majoritariamente na camada pós-sal, localizada acima da camada de sal (PETROBRAS, 2013).

seguido dos modelos: *Bottom up*<sup>5</sup> e de Dinâmica de Sistemas<sup>6</sup>. E na sequência as descrições dos modelos *top down*: taxas reservas/produções (R/P) e econométrico.

No Capítulo 3 são apresentadas algumas versões de modelos *top down* baseados na abordagem clássica de HUBBERT (1956, 1962). É feita, inicialmente, uma descrição do modelo clássico de Hubbert, suas suposições e o formato da curva original. Em seguida, outras formas de utilização do modelo Hubbertiano são apresentadas, como a descrição dos modelos propostos por MOHR (2010); BRANDT (2007); KAUFMANN (1990); MORENEY & BERG (1999); CAVALLO (2004) e REHRL & FRIEDRICH (2006). Por fim, será descrito o modelo multi-Hubbert aprimorado por LAHERRERE (1997) e, posteriormente, modificado por MAGGIO E CACCIOLA (2009; 2012), que é utilizado neste trabalho.

O Capítulo 4 tem como objetivo apresentar as projeções realizadas a partir do modelo multi-Hubbert modificado. Nesta seção são considerados três níveis de probabilidades de reservas para recursos: P95; P50 e P5. Posteriormente é feito um exercício hipotético, onde são considerados três diferentes níveis de reservas para o pré-sal: 30; 50 e 100 bilhões de barris de petróleo. Para este exercício, os dados utilizados assim como os cálculos efetuados, não têm qualquer caráter de projeção, pois, além da grande incerteza a respeito da URR para esse ciclo, não existe um histórico de produção que possibilite o ajuste por mínimos quadrados. Portanto, essa parte é considerada apenas como um exercício especulativo para verificar um possível comportamento de uma curva multi-Hubbert para a produção de petróleo no Brasil, ao se incluir o pré-sal.

Por fim, o Capítulo 5 conclui este trabalho e apresenta recomendações e possibilidades de estudos futuros.

---

<sup>5</sup> A modelagem *Bottom-up* é o típico modelo utilizado por empresas do setor petrolífero para os processos de tomada de decisões.

<sup>6</sup> Apesar de ter sido desenvolvido no intuito unir as melhores características dos modelos *Bottom up* e *Top down* a Dinâmica de Sistemas não obteve bons resultados em suas modelagens e por isso é pouco utilizado para estimações da produção petrolífera.

## 2 – Modelos Aplicados à Produção de Petróleo: revisão teórica

### 2.1. Conceitos: recursos e reservas

Os recursos naturais podem ser classificados como renováveis, quando, no período de tempo correspondente ao da existência das sociedades humanas, os elementos retirados da natureza são capazes de se regenerar ao estágio inicial, como as plantas e os animais<sup>7</sup>; e não renováveis, que são definidos como sendo os recursos que não são capazes de repor seus elementos retirados do ambiente natural, como petróleo, carvão e diversos outros minerais, na escala de tempo antrópica.

Uma das preocupações de subsistência humana da sociedade moderna está concentrada no problema de esgotamento dos recursos exauríveis (HOTELLING, 1931; HUBBERT, 1956). É dentro deste campo que muitos esforços são feitos a fim de se desenvolver novas descobertas e novas tecnologias de exploração. Não obstante, a primeira questão importante remete ao próprio conceito de recursos e reservas. A *Society of Petroleum Engineers* (SPE) e o *World Petroleum Congress* (WPC), a partir da necessidade de lidar com a incerteza na avaliação técnica, definiram que os recursos devem ser subdivididos em três categorias: potencial (desconhecido), contingente (conhecido, porém sub-comercial) e reservas (comercial) (OWENN, INDERWILDI & KING, 2010), sendo as definições, de recurso mais abrangente, e de reserva mais particular, as de principal interesse para o escopo deste trabalho.

Assim o conceito de recurso, no que abrange recursos exauríveis, se traduz como sendo a quantidade total finita de um determinado recurso natural, independentemente de suas fontes já terem sido ou não descobertas, ou se elas são ou não recuperáveis. Dessa forma o conceito de recurso abrange todo o material de interesse que esteja contido em subsolo terrestre como, por exemplo, o petróleo, sendo a totalidade deste conhecido ou não (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; ROGNER, 2000; LAHERRERE, 2001; OWENN, INDERWILDI & KING, 2010). Na literatura para

---

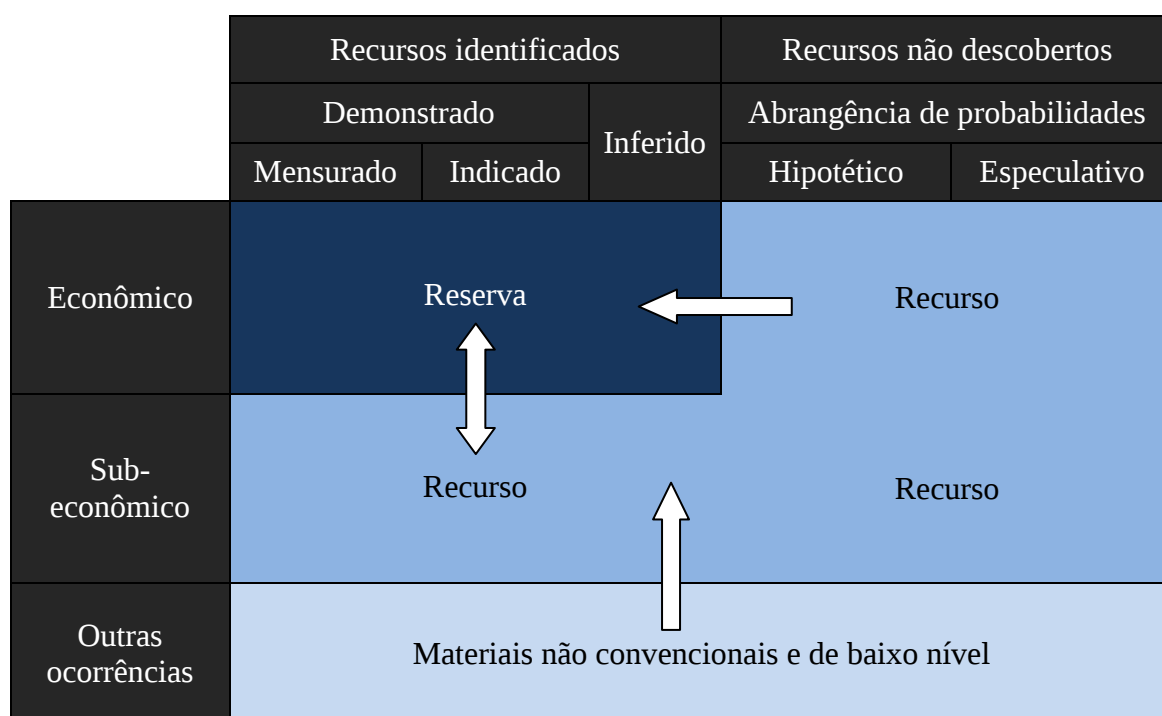
<sup>7</sup> Existem espécies de animais que possuem uma taxa de exploração acima de sua taxa de reposição, a essas espécies a economia ambiental define como espécies passivas de extinção, para maiores detalhes consultar PEARCE E TURNER (1990).

petróleo, também pode ser denominado *petroleum in place* (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007).

Em contrapartida reserva é descrita como uma parte conhecida e recuperável (passível de ser explorada) da matéria prima desejada, diante das condições técnicas e econômicas no momento da sua determinação. Portanto, se um poço de petróleo<sup>8</sup> for considerado técnica ou economicamente inviável à exploração isso não significa que sua quantidade total na área de exploração tenha acabado, mas sim que é inviável continuar a exploração dessa mesma área. Segundo a definição dada por *Beyond Petroleum* (2012) as reservas correspondem: "as quantidades estimadas de petróleo que os dados geológicos e de engenharia demonstram com razoável certeza serem recuperáveis nos próximos anos, a partir de reservatórios conhecidos sob condições econômicas e operacionais atuais". Porque a definição de reserva depende de fatores dinâmicos, como a tecnologia e a economia, possíveis alterações nos preços do mineral ou de suas formas de exploração e aproveitamento podem alterar os níveis de reservas, mas nunca a quantidade de recurso (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; ROGNER, 2000; LAHERRERE, 2001; OWENN, INDERWILDI & KING, 2010; FERREIRA, 2005).

---

<sup>8</sup> Petróleo foi utilizado aqui apenas como exemplificação, mas a definição técnica de reservas e recursos se aplica a qualquer mineral natural presente na superfície terrestre.



**Figura 1: Princípio da classificação do recurso**

Fonte: Adaptado de ROGNER (2000).

A Figura 1 exemplifica bem a distinção entre os conceitos de recurso e reserva, conforme a abordagem determinista. Através dela se é possível observar como o conceito de reserva está contido no conceito de recurso. Em seu texto ROGNER (2000) apresenta esta abordagem determinista para explicar os conceitos apresentados pela matriz do princípio da classificação do recurso. Nesse sistema de classificação, recursos são definidos como concentrações de ocorrências naturais (sólido; líquido e gasoso) de materiais dentro ou sobre a crosta terrestre, de tal forma que a extração econômica seja potencialmente realizável. Sobre esse panorama se tem que a dimensão geológica é dividida em recursos identificados e não descobertos. Os recursos identificados são depósitos com a sua localização conhecida, grau, qualidade e quantidade, os quais podem ser estimados a partir de evidências geológicas. Recursos identificados ainda podem ser subdivididos em demonstrados (mensurados mais indicados) e inferidos, que refletem a variação dos graus de segurança geológica. Assim reservas são definidas como sendo os recursos identificados que são economicamente recuperáveis no dado tempo de avaliação.

Já recursos não descobertos são quantidades esperadas ou postuladas a existir sobre condições geológicas singulares. Outras ocorrências são materiais que possuem

quantidades ou qualidades muito baixas ou possuem outras razões que os não considerem técnica ou economicamente potencialmente explotáveis. Na maioria dos casos, recursos não convencionais são incluídos como “outras ocorrências”.

Dada essa subjetividade sobre as reservas, por possuírem níveis que podem ser alterados, além das dificuldades técnicas de serem medidas com exatidão SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) apresentaram duas abordagens distintas a respeito da medição das mesmas: a primeira seria a aproximação determinista (reservas medidas, indicadas e inferidas); a segunda aproximação, mais utilizada em estudos sobre energia, se dá por meio de termos probabilísticos (1P, 2P e 3P), que para fins desta dissertação será a abordagem adotada. A SPE e o WPC, a fim de estabelecerem um referencial internacional para os conceitos de reservas, padronizaram sua classificação nos três termos probabilísticos (1P, 2P e 3P) (FERREIRA, 2005). Esse foi um sistema desenvolvido para abordar as avaliações inerentes e as incertezas de produção existentes a respeito de reservas (OWENN, INDERWILDI & KING, 2010). Os termos foram definidos conforme probabilidades:

1. Reservas Provadas (1P): são as reservas que possuem uma quantidade mínima que pode ser técnica e economicamente viável de ser recuperada com 90% de certeza;
2. Reservas Provadas + Prováveis (2P): são as reservas que possuem uma quantidade mínima que pode ser técnica e economicamente viável de ser recuperada com 50% de certeza;
3. Reservas Provadas + Prováveis + Possíveis (3P): são as reservas que possuem uma quantidade mínima que pode ser técnica e economicamente viável de ser recuperada com 10% de certeza.

Segundo SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) normalmente, para a abordagem probabilística, utiliza-se uma curva log-normal, que expressa a probabilidade de as reservas em um campo de petróleo serem maiores do que um determinado volume. Essa distribuição traduz um efeito de proporcionalidade, sendo muito “pessimista” para objetos pequenos, e muito “otimista” para objetos grandes.

Como já mencionado, alterações em fatores externos à produção, como o preço do petróleo<sup>9</sup>, podem alterar a relação entre os conceitos de reservas, pois uma elevação

---

<sup>9</sup> Novamente o petróleo está sendo utilizado apenas como exemplificação de recursos exauríveis.

de preços poderia modificar toda a dinâmica econômica sobre esses conceitos<sup>10</sup>. Onde antes existiam reservas com baixas probabilidades de serem exploradas, devido a custos muito elevados de exploração, sob novos preços, estes recursos poderiam passar a ser viáveis economicamente (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; ROGNER, 2000; LAHERRERE, 2001; OWENN, INDERWILDI & KING, 2010; FERREIRA, 2005). É por essa linha de pensamento que SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) afirmam que os aumentos de preço podem levar a reclassificações de parte das reservas (de 2P para 1P, por exemplo), por alterar sua viabilidade econômica.

Com essas constantes reclassificações e assumindo estimações de reservas precisas, tem-se que as probabilidades 1P e 3P, devido às variações econômicas e tecnológicas, variam mais frequente e intensamente do que as reservas 2P. De fato, as reservas 2P, embora também sejam constantemente revisadas, devem ser mais estáveis e, portanto, mais adequadas para a realização de previsões, na medida em que decrescem devido à sua transformação em reservas P, mas crescem devido à transformação de reservas 3P em 2P.

Assim, BENTLEY et al. (2007) e MENG AND BENTLEY (2008) afirmam que, ao se observar a evolução histórica das definições de reservas, são as reservas 2P, que com o conhecimento geológico do mundo atual, devem representar volumes de reserva mais adequados quando comparadas às demais definições. Mas, para o longo prazo as previsões se comportam como “economicamente analfabetas<sup>11</sup>”, ou seja, não há previsões que expliquem bem os resultados geológicos nos países produtores do mundo no longo prazo. A afirmação de que as reservas 2P seriam mais adequadas à realização de previsões resolveria parte dos problemas de previsões no mundo do petróleo, pois alguns países relatam uma mistura de reservas 1P, 2P e 3P e os dados apresentados ao domínio público não explicam adequadamente as discrepâncias entre os relatórios de metodologias (BENTLEY et al. (2007) e OWENN, INDERWILDI & KING, 2010).

Seguindo SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007), há ainda outros fatores que permitem a alteração entre os conceitos de reserva, como o progresso tecnológico e o desenvolvimento de conhecimento. Estes fatores podem redefinir conceitos

---

<sup>10</sup> É importante destacar que a elevação ilimitada de preços não é possível, pois existe um limite de crescimento conhecido como *backstop technology*, que é entendido como sendo um limite onde o recurso possa ser substituído por uma nova tecnologia, que proporcionará a mesma utilidade da tecnologia anterior (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; PEARCE E TURNER, 1990).

<sup>11</sup> BENTLEY et al. (2007) caracterizaram este efeito, pelo termo em inglês “*economically illiterate*”

convencionais e não convencionais da exploração e produção do petróleo, promovendo novas descobertas; barateamento das etapas de exploração, extração e desenvolvimento; além da melhora nas taxas de recuperação.

Outras possibilidades de inovação estão no refino de petróleo, pois modificações nas refinarias podem afetar o tamanho das reservas provadas: diretamente, devido à capacidade de processamento de óleos com diferentes qualidades;<sup>12</sup> e indiretamente, pois, dependendo da escala das refinarias (processamento, conversão ou tratamento), o refino poderá alterar o preço do petróleo e a diferença de preços entre os óleos marcadores e os pesados, permitindo ou impedindo, assim, a intrusão de volumes adicionais nas reservas provadas.

Assim, a quantidade e classificação de reservas são continuamente revistas. Dado o aumento de preços do petróleo e a redução de custos, devido às inovações técnicas e maiores níveis de conhecimento, o que era recurso se transforma em reserva e reclassificações nos conceitos de reservas são constantes (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; ROGNER, 2000; OWENN, INDERWILDI & KING, 2010).

As definições de recurso e reservas como apresentadas são de fundamental importância para o estudo do uso dos recursos exauríveis. PEARCE E TURNER (1990) mostram que o princípio fundamental do uso dos recursos exauríveis é que o preço marginal do produto está diretamente relacionado com o tamanho da reserva existente. Foi a partir do conceito do tamanho da reserva existente de um recurso exaurível que Hotelling em 1931 ampliou e popularizou a discussão sobre os recursos exauríveis, em seu artigo *The Economics of Exhaustible Resources*, tendo como principal objetivo o estudo de formas de utilização desses recursos (HOTELLING, 1931).

---

<sup>12</sup> A classificação de petróleos em termos de qualidade se dá, principalmente, através do que se chama de “Grau API”. API, na sigla em inglês, significa *Association Petroleum Institute*. De acordo com essa escala, um petróleo considerado leve possui grau API em torno de 39° a 41° API. Exemplos de óleos leves são os óleos chamados “marcadores” no mercado internacional, como o *Brent* e o *WTI (West Texas Intermediate)*, que são os petróleos de referência para a formação dos preços de outros petróleos. Ainda, outros critérios de qualidade para o petróleo são utilizados, como grau de acidez, teor de contaminantes (enxofre, oxigênio e nitrogênio, dentre outros) (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007).

## 2.2. A Regra de Hotelling:

Com os conceitos de recursos e reservas bem definidos, é possível introduzir a discussão sobre os recursos exauríveis apresentada por HOTELLING (1931)<sup>13</sup>. Àquela época, Hotelling observou que as formas de consumo desses tipos de recursos não condiziam com o real valor que os mesmos possuíam. Dado que esses tipos de recursos eram finitos, precificá-los apenas segundo seus custos de extração não fazia sentido na interpretação do autor, pois gerava desperdícios em sua produção e utilização, devido aos custos muito abaixo do que se deveria ter como ideal<sup>14</sup>.

Assim, HOTELLING (1931) afirma que esses produtos eram excessivamente baratos e que, para haver uma otimização na utilização desses bens almejando um bem social para as gerações futuras, se deveria ter um tipo de gerenciamento que desacelerasse a rápida taxa de exploração. Para o consumo dos recursos exauríveis haveria uma taxa de raridade econômica ou de escassez, uma vez que o uso ilimitado desse tipo de matéria prima não é possível. A extração e o consumo de hoje implica na não extração e consumo de amanhã, ou em termos econômicos, o faturamento de hoje resulta no não faturamento de amanhã. Assim existe um custo de oportunidade de extração do recurso ao decorrer do tempo (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007). Então há um custo de oportunidade de não se extrair hoje e um efeito de depleção do produto em se o extrair (HOTELLING, 1931). Foi partindo desse processo que o autor observou que haveria um custo oculto (*shadow price*, como o autor se refere), que não era intertemporalmente contabilizado nos custos dos produtores e, assim, se propõe a encontrar um novo caminho de exploração e exploração dos recursos não renováveis (HOTELLING, 1931; BLACK, 1998; LIN & WAGNE, 2007).

O modelo inicial e mais simplificado foi proposto sob as condições de concorrência perfeita, além de premissas básicas que incluíam: todas as reservas são conhecidas no instante inicial, assim não há possibilidades de descobertas ou mesmo reclassificações de recurso em reservas<sup>15</sup>; os recursos deveriam ter seu valor unitário equivalente, ou seja, os recursos eram extraídos por ordem de acessibilidade, as reservas mais baratas estariam disponíveis primeiro (premissa compatível com a estrutura de

---

<sup>13</sup> A descrição detalhada do modelo de Hotelling ver Anexo 6.

<sup>14</sup> Exemplos como métodos de extração e refino ultrapassados, causando muitos desperdícios, foram citados pelo autor (HOTELLING, 1931).

<sup>15</sup> Idéia contrária ao modelo de Hubbert, que será discutido amplamente no decorrer da dissertação.

mercado em concorrência pura e perfeita); as minas são de propriedade privada e o preço do produto deve ser interpretado como um preço líquido, sendo descontados os custos operacionais (HOTELLING, 1931; SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; HART & SPIRO, 2011; BLACK, 1998; LIN & WAGNE, 2007).

Assim, HOTELLING (1931) obtém que o preço do recurso exaurível será dado por:

$$P_t = P_0 e^{\gamma t} \quad \text{Eq. 0}$$

Onde,  $\gamma$  o que ele chamaria de *força de desconto* (i.e., sob os conceitos atuais denominada de taxa de desconto) e  $P_0$  o preço no tempo 0 que seria determinado pela demanda e a oferta total do produto (reserva).

Mas notoriamente existem três grandes limitações a respeito dos conceitos fundamentais elaborados por Hotelling, que são relatados pela maioria dos autores, pró ou contra a teoria Hotellingana, como sendo as principais falhas do modelo à adequação aos dados observados no Século XX para exploração e exploração do petróleo, dentre elas estão:

A primeira a ser citada é o problema dos custos marginais crescentes. Na interpretação de BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998 e SMIT (2011), haveria uma perda de pressão nos poços à medida que os mesmos são explorados, conduzindo, assim, a um contínuo reajuste dos custos marginais de exploração, pois, para um poço de petróleo é entendido que: para cada unidade de óleo retirada do poço, mais difícil se é retirar a unidade seguinte, causando custos maiores de extração por cada unidade de petróleo que será produzida (retirada)<sup>16</sup>. É ainda afirmado que a exploração dos poços de petróleo não seguiria outro pressuposto de Hotelling, aquele segundo o qual as explorações deveriam ser realizadas de acordo com os menores custos de exploração<sup>17</sup>. Esses autores, dentre outros, justificam essa afirmação argumentando a existência de estratégias comerciais<sup>18</sup>, questões políticas ou por questão de acesso geológico.

A segunda falha do modelo está definida na desconsideração do desenvolvimento tecnológico. Essa não seria apenas devido ao fato apresentado por

---

<sup>16</sup> Fato que pode ter como interpretação o efeito de depleção proposto por Hubbert, interpretação que será descrita no capítulo 3.

<sup>17</sup> Em ordem de acessibilidade, os recursos mais acessíveis, ou os mais baratos, deveriam estar disponíveis primeiro. (HOTELLING, 1931)

<sup>18</sup> Como pôde ser identificado nos Estados Unidos nas décadas 1950 e 1960 (Ver: KAUFMANN; KARADELOGLOU & MAURO, 1998).

FISHELSON (1983) e outros autores, segundo o qual diferentes tecnologias poderiam modificar as necessidades de demanda ou as formas da oferta. Tal falha estaria também em uma hipótese do modelo clássico de Hotelling, segundo a qual o esgotamento das reservas coincidiria com a ausência da demanda. Essa hipótese não condiz com a realidade segundo a qual o progresso tecnológico deverá conduzir não apenas a novas formas de exploração e uso das reservas de petróleo, mas também acarretará na provável substituição entre as fontes energéticas: assim, no limite dos preços ou preço-teto, o petróleo deverá ser substituído por outra tecnologia “*Backstop Technology*” (BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998; SMIT, 2011 e ADELMAN, 2002).

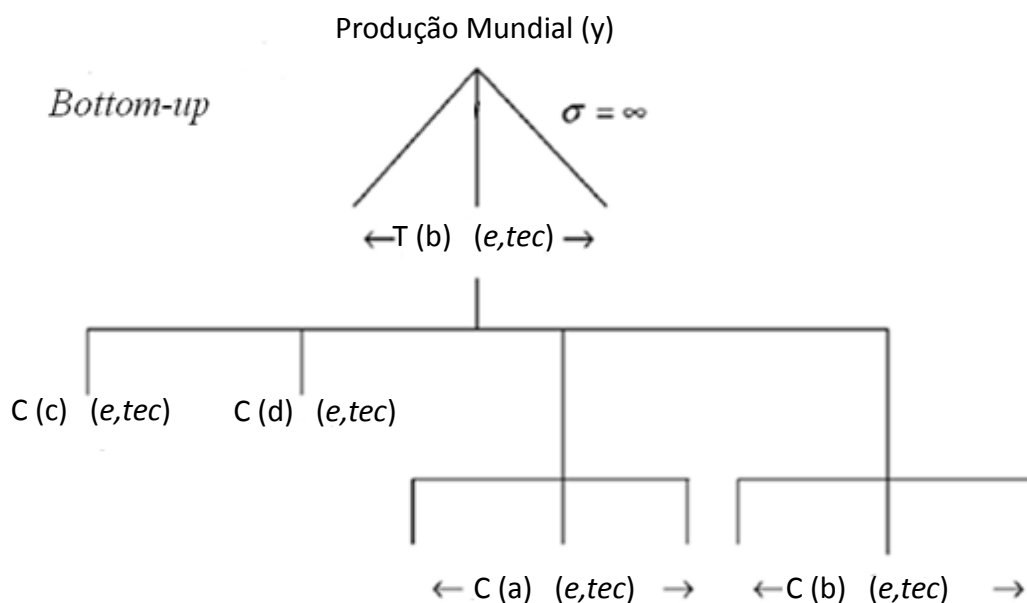
Por fim se tem o postulado mais amplamente criticado de Hotelling, que é o do conhecimento das reservas totais no instante inicial da produção (BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998; SMIT, 2011 e SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; HART & SPIRO, 2011; REHRL & FRIEDRICH, 2006 e REYNOLDS & BAEK, 2012). Como já visto, o conceito de reservas é continuamente revisto devido às constantes modificações nos preços e nas tecnologias relacionados ao petróleo. Arelado a esse fato estão os conhecimentos geológicos obtidos até hoje, a respeito da determinação de quantias de reservas. Estes conhecimentos possuem níveis de incertezas impossíveis de serem desprezados, associando, assim, todo o estudo de reservas a probabilidades (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; REYNOLDS & BAEK, 2012 e HART & SPIRO, 2011).

## **2.3. Descrição dos modelos: *Bottom up* e Dinâmica de sistemas**

### **2.3.1. A modelagem *Bottom-up*:**

A modelagem *Bottom-up* é uma categoria de modelos que realiza o processamento de informações sobre uma base de dados desagregada sobre campos de petróleo. Inicialmente esses conjuntos de dados são colocados dentro de uma base de entrada (*inputs*) e formam os elementos básicos iniciais, estes elementos serão interligados em cadeia pelo analista até que um resultado seja obtido (*outputs*). Por vezes vários níveis dessas interligações são criados até que um sistema superior contendo todas as informações e conexões necessárias seja formado (SCHINDLER,

2007). Dessa forma não há uma teoria que encontre por um único formato a solução da exploração de petróleo, por exemplo, mas sim um conjunto de dados que, quando interligados por um processo silogístico<sup>19</sup>, constrói uma solução para o problema. WING (2008) elaborou um esquema da estrutura *Bottom-up* que representa bem a formação da modelagem, como mostra a figura 2:



**Figura 2: A estrutura de produção de a modelagem *Bottom-up***

Fonte: Adaptado de WING (2008)

A Figura 2 é uma ilustração esquemática do funcionamento de uma estrutura de produção *Bottom-up*. O objetivo dessa representação é mostrar como uma cadeia *Bottom-up* é tipicamente estruturada e como uma série de dados pode ser interconectada. A Figura 2 é uma exemplificação dessa abordagem Bottom-Up, segundo a qual uma série de dados iniciais é introduzida ao modelo cada um representando um campo isolado de exploração de petróleo de uma nação (i.e.  $C(a)$ ;  $C(b)$ ;  $C(c)$ ;  $C(d)$ ...). Quando tais dados são interligados (somados) por um analista, o modelo gera um

<sup>19</sup> O processo silogístico citado no texto faz alusão à forma empírica que as interligações dos dados iniciais são trabalhadas por um analista, a fim de gerar um resultado ao modelo *Bottom-up* que solucione seu problema. É importante acentuar que esse processo silogístico é geralmente utilizado com o auxílio de uma ferramenta computacional, como a matriz que representa transições econômicas a: *social accounting matrix* (SAM).

resultado. Para o caso do exemplo, o resultado da soma dos dados iniciais é a reserva total de uma determinada nação ( $T(2)$ ). Por vezes um único fenômeno (i.e.  $T(2)$ ) não compreende o resultado final almejado por um analista. Por exemplo, se o objetivo final para o modelo for o valor da reserva mundial de petróleo ( $y$ ), então, se no modelo os dados iniciais forem os campos individuais de cada nação, o primeiro resultado obtido será as reservas totais de cada nação do mundo (i.e.  $T(1)$ ;  $T(2)$ ;  $T(3)$ ...), que, quando somadas, resultarão na reserva mundial de petróleo ( $y$ ). Esses processos podem necessitar por vezes de diversas interligações, ao depender do caminho que o analista escolheu para alcançar seu objetivo final. Os fatores  $e$ ;  $tec$  são as representações respectivas à evolução econômica e à evolução tecnológica, que influenciam diretamente nos volumes de reservas dos campos de produção.

Como já considerado, a modelagem *Bottom-up* é uma categoria de modelos, mas, com um único formato, não é possível caracterizar todas suas possíveis representações. A rigor, adota-se aqui a terminologia de Brandt (2010) que considera a abordagem *Bottom-up* como uma categoria de modelagem. Em verdade, trata-se, sobretudo, de uma abordagem de construção da previsão de produção de petróleo a partir da soma de unidades produtivas cuja produção individualizada também deverá ser prevista.

Para as previsões de petróleo, BRANDT (2010) considerou que esse tipo de modelagem é capaz de incorporar, de forma lenta, mas contínua, novas descobertas de petróleo, sendo possível revelar o aumento das expectativas das frações de petróleo que deverão ser aditadas aos campos petrolíferos já descobertos. Segundo MOHR (2010) a “*International Energy Agency*” (IEA, 2012) desenvolveu o “*World Energy Model*” (WEM), que tem como principal objetivo prover projeções energéticas de médio e longo prazo. O modelo é construído para replicar o funcionamento do mercado energético mundial e é a principal ferramenta designada para detalhar as projeções, de setor a setor e de região a região, sobre uma perspectiva de diferentes cenários (IEA, 2012). Conforme constatado por MOHR (2010), o WEM se utiliza de um modelo *Bottom-up* específico que analisa as “*creaming curves*”<sup>20</sup> com considerações econômicas para determinar as quantias descobertas de petróleo.

---

<sup>20</sup> As “*creaming curves*” foram criadas pela Shell na década de 1980, a fim de modelar as descobertas acumuladas de petróleo versus o número acumulado de poços exploratórios, tais curvas serão mais bem detalhadas no capítulo três, onde estarão correlacionadas com modelo de Hubbert para a estimação da produção de petróleo (LAHERRERE, 2009, 2011, 2012).

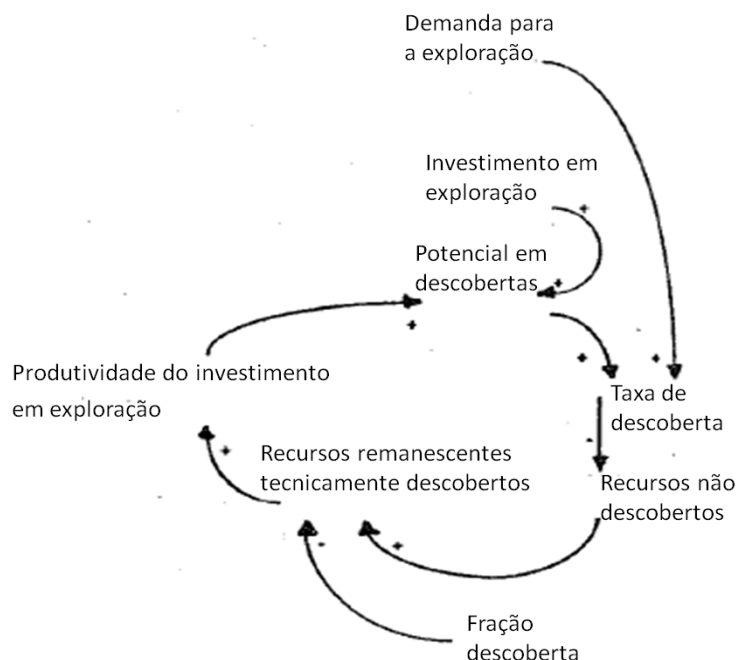
Um problema relatado por BRANDT (2010) relacionado ao modelo *Bottom-up* ocorre devido à grande complexidade do modelo; logo, este não pode ser escrito em uma forma funcional simplificada. Ou seja, destaca-se a inexistência de um modelo padrão a ser seguido, o que leva à grande dificuldade para gerar uma correspondência entre os modelos. Isso faz com que os pontos médios de pico e padrões na forma das curvas não possuam um referencial. Assim, esses modelos não são próprios para estimações de longo prazo para o setor petrolífero, mas sim indicados para descobertas de curto prazo e/ou para explicar campos já descobertos.

Portanto, o que se pode concluir sobre os modelos *Bottom-up* é que se trata de modelos que não possuem um formato padrão, o que acarreta em grandes dificuldades comparativas entre os resultados dos próprios modelos, além de apresentarem a necessidade de dados diferentes para cada formato usado. São ainda modelos que necessitam de um extenso e bem elaborado banco de dados, que possibilitam por vezes, duplas contagens e/ou divergências entre dados, o que acarreta dificuldades metodológicas e analíticas, possibilitando erros de correlação e/ou imprecisões nos cálculos. Assim os modelos *Bottom-up* não se prestam bem às estimativas de previsão de longo prazo da produção de petróleo que serão realizadas nesta dissertação.

### **2.3.2. Dinâmica de Sistemas**

A dinâmica de sistemas consiste em uma cadeia de etapas interligadas por ações (representadas por flechas), as quais resultarão em um diagrama de interações que buscará por mecanismos de causa e efeito estimar e /ou solucionar algum aspecto do sistema de exploração do petróleo. Uma descrição que representa bem a interatividade desse mecanismo foi desenvolvida por DAIVDSEN ET AL. (1987). Em seu artigo, os autores utilizaram um modelo de dinâmica de sistemas, onde tentaram descrever um modelo do ciclo de vida do petróleo nos Estados Unidos, incorporando a demanda, o desenvolvimento tecnológico e os investimentos na exploração e recuperação do petróleo. Mas foi no apêndice de seu artigo que DAIVDSEN ET AL. (1987) objetivaram esquematizar algumas formas das dinâmicas de sistemas da época. Ao desenharem alguns diagramas sobre modelos esquemáticos da dinâmica de sistemas, DAIVDSEN ET AL. (1987) retrataram bem o formato e a dificuldade de tal

modelagem. Um dos modelos mais simples apresentados por DAIVDSEN ET AL. (1987) está representado pela Figura 4.



**Figura 3: Diagrama das descobertas físicas da dinâmica de sistemas.**

Fonte: DAIVDSEN ET AL. (1987)

A forma apresentada na Figura 3 trata de um diagrama da física das descobertas de simulações em dinâmica de sistemas. Cada etapa da Figura 3 representa um elemento variável do diagrama. Esses elementos são ligados por flechas que demonstram qual etapa está influenciando a etapa seguinte e, por fim, os elementos são relacionados por sinais positivos (+) ou negativos (-), mostrando qual é o efeito *feedback* entre cada elemento. Cada uma das flechas corresponde a quantificações de relações gráficas, que são difíceis de serem descritas por um modelo de funções matemáticas (BRANDT, 2010). Cabe lembrar que o diagrama expresso pela Figura 3 representa apenas o estudo da física das descobertas, porém caso um trabalho necessite modelar uma situação que avalie mais de um diagrama de exploração, como, por exemplo, diagrama de investimentos na exploração e na tecnologia, ocorrerá um aumento na complexidade da solução do modelo.

Na descrição de BRANDT (2010), a modelagem por dinâmica de sistemas é um modelo que representa explicitamente mecanismos fundamentais físicos, como o

representado pelo diagrama de descobertas físicas, e/ou mecanismos fundamentais econômicos, que seria, por exemplo, como o diagrama proposto por DAIVDSEN ET AL. (1987) sobre a demanda para a exploração. Esses mecanismos são capazes de incorporar as descobertas e extrações de petróleo, dessa forma, não são necessárias especificações prévias para se desenvolver as curvas de produção, já que essas curvas serão formadas pelas interações propostas entre os mecanismos fundamentais. Foi ainda descrito que esses tipos de modelos incluem uma ampla gama de variáveis independentes<sup>21</sup>, o que ocasiona um problema chave para o ajuste das curvas de produção (BRANDT, 2010), pois, como não há causa e efeito na relação entre o tempo e a exploração de petróleo (TAYLOR, 1998), correlacionar algumas dessas variáveis no decorrer do tempo não é um trabalho simples.

Trabalhos mais recentes, como os de GREENE; HOPSON & LI (2003) e BARDI (2005), além da publicação de REYNOLDS (1999), utilizaram um modelo tipo Monte Carlo. Conforme descrito por REYNOLDS (1999), esse modelo é como um jogo de roleta, onde haveria chances de a bola cair em uma faixa preta, o que significa petróleo, ou em uma vermelha, o que significa área seca (i.e: sem petróleo). Na interpretação de REYNOLDS (1999), o jogo prosseguiria seguindo a lógica de um jogador (i.e., empreendedor) ter um custo de entrada no jogo igual ao custo de perfurar um poço; caso a jogada (i.e., perfuração) resultasse em preto, a recompensa seria a quantidade de petróleo encontrado no poço; caso resultasse em vermelho, perderia o custo de entrada. Assim, diferentes roletas (países) teriam diferentes probabilidades de possuírem maiores, menores ou nenhuma quantidade de faixas pretas (petróleo) em suas roletas (regiões). Esse fato pode ser observado nos países do Oriente Médio que possuem taxas de perfuração<sup>22</sup> muito acima das taxas de perfuração de países como a Suíça, por exemplo.

Para os estudos de BARDI (2005) e REYNOLDS (1999) a modelagem Monte Carlo resultou em um problema de *Mayflower*, em que inicialmente existe pouca informação com poucos exploradores interessados em tal risco. Com o aumento das informações, mais exploradores se interessam pela exploração já que as probabilidades de se encontrar petróleo aumentam. Por fim já não mais há interesse sobre as

---

<sup>21</sup> Fato que pôde ser observado na Figura 3.

<sup>22</sup> Taxas de perfuração podem ser interpretadas como sendo a razão de poços perfurados pelos poços com descobertas de petróleo (THOMAS, 2001).

explorações, pois com a escassez do produto a probabilidade de se ter sucesso torna o risco novamente desinteressante.

Foi partindo do problema de *Mayflower* que REYNOLDS (1999) afirmou que o problema dos recursos exauríveis depende da economia e da influência da evolução tecnológica no processo de depleção do petróleo. Os artigos de REYNOLDS (1999) e BARDI (2005) se desenvolveram a partir de um modelo econômico dos minerais, averiguando alguns dos princípios Hotellinganos, e se desenvolveram assumindo um dilema do tipo *Robinson Crusoe*<sup>23</sup>. REYNOLDS (1999) e BARDI (2005) verificaram que o modelo de Hotelling assume informações perfeitas sobre: o preço da próxima melhor tecnologia (*backstop*); a quantidade do recurso; a demanda do recurso e o custo de extração do recurso. Porém, incertezas sobre estes fatores acarretariam a impossibilidade da utilização de o modelo. Foi negando as informações perfeitas propostas por Hotelling que REYNOLDS (1999) e BARDI (2005) desenvolveram um modelo que mostra como a incerteza sobre a determinação de uma base de reserva pode ocultar o quanto se adicionaria em reserva devido ao desenvolvimento tecnológico. Concluíram que a indeterminação sobre a base de reservas seria o possível causador de choques no preço do petróleo, já que os dados sobre os preços e os custos por eles observados poderiam gerar discrepância entre a demanda e a oferta de petróleo, o que ocasionaria o choque dos preços.

O método de dinâmica de sistemas é um modelo utilizado para as previsões de reservas de petróleo. Os modelos apresentados no decorrer desta seção apresentaram resultados coerentes sob um ponto de vista metodológico, mas ao se notar as dificuldades dessa modelagem, como observado pela representação esquemática de DAIVDSEN ET AL. (1987), foi possível compreender a dificuldade de se modelar pela dinâmica de sistemas. É um modelo com contínuas interações entre fatores que são retroalimentados pelo próprio modelo. Quando o analista introduz mais de um diagrama de sistemas ao modelo, a complexidade em relacionar fatores econômicos, físicos e políticos aumenta o que, por um exemplo, torna o modelo difícil de ser resolvido. Dessa forma, apesar de os modelos propostos terem apresentado resultados coerentes, essa forma de modelagem geralmente é utilizada para estimações de produção de curto

---

<sup>23</sup> O dilema de *Robinson Crusoe* pode ser descrito como sendo descobrir o quanto o produtor deverá produzir no instante presente, sabendo que, se ele guardar, irá receber mais no futuro REYNOLDS (1999).

prazo, portanto a dinâmica de sistemas não é usualmente aplicado em trabalhos científicos e, assim, explica-se a preferência por não os empregar nas estimações que serão propostas nesta dissertação.

## 2.4 Descrição de modelos *top down*:

### 2.4.1. Modelo *R/P*:

Conforme descrito por MOHR (2010), o modelo ou taxa *R/P* é definido como a razão entre as reservas provadas atuais e a produção em base anual. Já BRANDT (2010) definiu o modelo como o número de anos que dada reserva provada levará até atingir sua exaustão completa assumindo o ritmo atual de produção, sendo esse tempo expresso por  $t_{ex}$  calculado pela divisão das reservas conhecidas até dado momento (*R*) ou pelos recursos remanescentes (*M*), sobre a produção vigente no determinado instante, produção atual (*P*).

$$t_{ex} = R/P, \quad \text{Eq. 1}$$

ou

$$t_{ex} = M/P. \quad \text{Eq. 2}$$

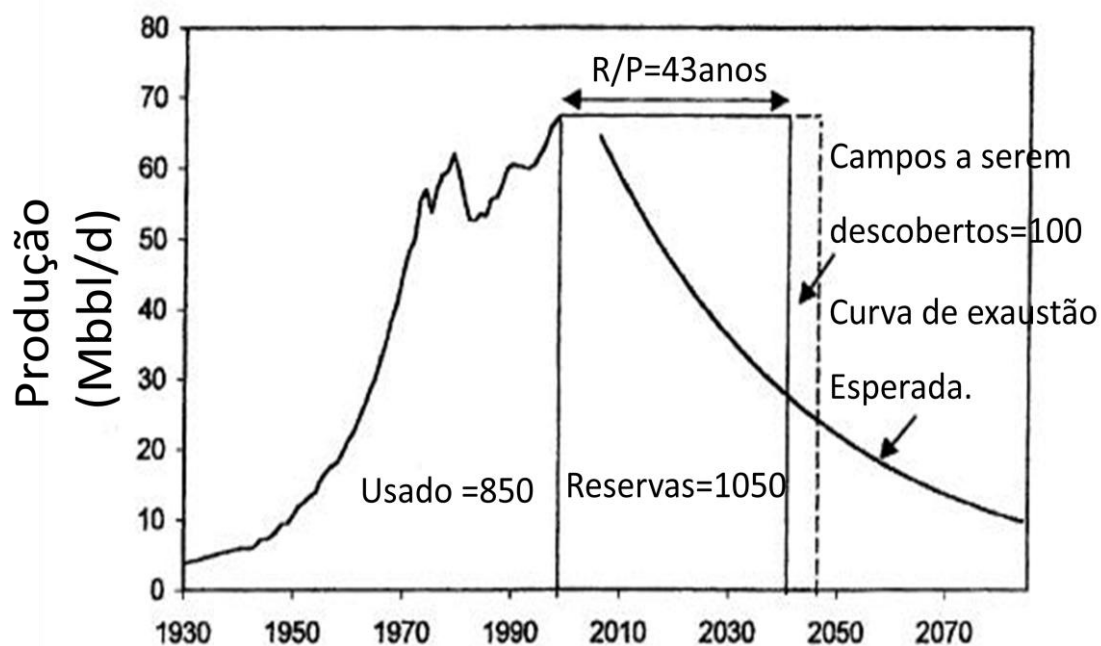
Logo, BRANDT (2010) constata que *M* na Eq. 2 considera estimativas de crescimento das reservas de forma diferente que as consideradas em *R* na Eq. 1. Essas estimativas teriam uma diferença fundamental nas probabilidades de acontecimentos, onde reservas conhecidas (provadas) teriam, em termos probabilísticos, um fator  $1P$  de probabilidade de ocorrência, já recursos remanescentes incluiriam um nível de reservas que ainda deverão ser provadas, incluindo, por exemplo, um termo probabilístico  $2P$  e mesmo parte dos recursos contingentes. Assim, BRANDT (2010) ressaltou que o resultado da Eq. 2 deverá ser maior que o da Eq. 1, devido ao simples fato de as reservas consideradas para a elaboração dos resultados na Eq. 1 serem menores que as atribuídas para o cálculo na Eq. 2. Assim, se é possível prever que algumas dificuldades na definição de dados a serem coletados para esses fins são frequentes e, para serem gerados resultados coerentes, uma análise crítica sobre esses dados é necessária.

Com as definições de reservas já bem estabelecidas anteriormente, podemos associar ao modelo *R/P* uma grande dificuldade de se obterem dados confiáveis

disponíveis publicamente. Conforme argumentado por SORRELL ET AL. (2010), dados adequados ao estudo da produção do petróleo são caros e muitas vezes não confiáveis. Ademais, confusões entre as definições de reservas (1P; 2P) são constantes entre os países e não há uma padronização mundial de medição dessas reservas por países produtores. Dessa forma, é observada uma grande dificuldade em adequar os dados às necessidades do modelo. SORRELL ET AL. (2010) ainda argumentam que não há interesse de alguns grandes produtores em divulgar seus resultados reais: como os países da OPEP, devido a suas constantes estratégias de produção; ou de países, como a Rússia, que não mantêm um padrão para seus resultados para confundir seus concorrentes.

MOHR (2010) argumenta que a vantagem de se utilizar a taxa  $R/P$  é a transparência do modelo e sua fácil utilização. É relatado que este é o modelo utilizado pela “*Energy Information Administration*” (EIA) para estimações anuais da produção de petróleo, mas com a ressalva de que se trata de um modelo que necessita de ajustes constantes, sendo indicado como bom para estimativas de curto prazo. Entretanto, a grande desvantagem apontada por MOHR (2010) está na necessidade da definição de reservas e na necessidade de um extenso banco de dados a respeito de reservas e produção.

BENTLEY (2002) critica o uso da taxa  $R/P$  para previsões de longo prazo, pois, para o autor, a taxa desconsidera qualquer evolução tecnológica e qualquer alteração na taxa de extração, sendo uma simples linearização do esgotamento das reservas às taxas atuais de extração. A Figura 4 exemplifica o pensamento de Bentley.



**Figura 4: Consumo das reservas mundiais segundo Bentley**

Fonte: BENTLEY (2002)

A Figura 4 ilustra bem a crítica de BENTLEY (2002). Como pode ser observado, a taxa  $R/P$  revela um consumo linear das reservas mundiais, onde é traçada uma hipótese de que as reservas mundiais de petróleo seguiriam anualmente o mesmo nível de consumo do ano 2000 até a uma suposta exaustão em 2040. Ao se desconsiderar qualquer efeito de depleção; evolução tecnológica; fatores físicos e fatores econômicos, o resultado encontrado por BENTLEY (2002), utilizando a taxa  $R/P$ , não condiz com os dados reais observados em longo prazo. Como pode ser observado, o uso de um modelo simplório a fim de traçar um ritmo que pudesse se aproximar de uma curva real de exploração do petróleo deve ser conduzido com cautela.

Portanto, por se tratar de um modelo inadequado para se realizar estimações de longo prazo e por possuir a necessidade de um extenso e muitas vezes inadequado banco de dados, a utilização da taxa  $R/P$  não é adequada para modelar a produção futura dos campos de petróleo no longo prazo. Dessa forma, se torna inadequado às necessidades deste trabalho, resultando na necessidade de se buscar outros modelos.

### 2.4.2. Modelos Econométricos

Alguns dos temas genéricos de interesse na área do desenvolvimento dos métodos econométricos são a estimação e a construção de modelos empíricos voltados para a previsão (Boletim SPE, 2009). Segundo BRANDT (2010) os modelos econométricos para indústria do petróleo são modelos que assumem dados estatísticos sobre oferta e demanda, tais como o preço e o custo de exploração, que se comportam como variáveis aleatórias<sup>24</sup>. Essas variáveis então são correlacionadas e projetadas através de uma função de regressão<sup>25</sup>. A partir da função de regressão, projetam-se os dados obtendo-se o cenário desejado.

CLEVELAND (1990) desenvolveu um modelo econométrico híbrido que tentou explicar as variações nas médias dos custos de produção de petróleo dos 48 campos norte-americanos. Seus resultados indicaram que ao longo das décadas de 1960 a 1980 as variações da média dos custos dos 48 campos se deveram a variações dos efeitos de depleção das reservas e dos efeitos de desenvolvimento tecnológico envolvidos na exploração do petróleo. A formulação desenvolvida por CLEVELAND (1990) explica melhor o funcionamento do modelo econométrico para a estimação da produção de petróleo:

$$AC = \beta_0 + \beta_1(E) + \beta_2(CD) + \beta_3(CD^2) + \beta_4(OPEP) \quad \text{Eq. 3}$$

Na Eq. 3  $AC$  é o custo médio de um modelo de múltipla regressão, que irá testar: 1) os custos médios do caminho de uma curva exponencial no longo prazo entre os anos 1936 a 1988; 2) se há maiores ou menores mudanças dos custos nos esforços de exploração, entre o curto e o longo prazo; 3) ou se o controle de mercado exercido pela OPEP de 1974 a 1985 aumentou a média dos custos do petróleo, quando comparado aos níveis prováveis sem as intervenções da mesma.  $AC$  é definida por:  $E$  que é uma taxa de esforço de produção no instante da medição;  $CD$  é a depleção acumulada das reservas e

---

<sup>24</sup> Variável aleatória é a terminologia usada para representar uma função que associe cada elemento (i.e. dado) de um espaço amostral (i.e. o conjunto de todos os dados observados) a um número real (MEYER, 2003).

<sup>25</sup> Uma exemplificação de uma função de regressão será detalhada pela Eq. 13, ainda neste capítulo.

*OPEP* é uma variável *dummy*<sup>26</sup> que foi definida para capturar os efeitos de controle de mercado do cartel da OPEP. Os  $\beta$ 's são os regressores (coeficientes de declividade das variáveis independentes da regressão AC (STOCK & WATSON, 2004)) e promovem uma mudança de unidade para cada um dos elementos *E*; *CD*; *CD*<sup>2</sup> e *OPEP*.

A Eq. 3 retrata bem uma função de regressão, onde os coeficientes  $\beta$ 's que são estimados para que se possa formar uma curva que tente explicar os dados observados para os 48 campos norte-americanos.

FISHER (1964) foi o pioneiro a utilizar um modelo econométrico e tentou explicar os custos e a oferta da indústria do petróleo norte-americana. Inicialmente esses modelos foram aplicados aos conceitos econômicos desenvolvidos por HOTELLING (1931) e sem incorporar qualquer problema geofísico em suas equações. FISHER (1964) encontrou resultados poucos expressivos quando comparados aos dados que viriam a ser efetivamente observados (DAHL & DUGGAN, 1998). DAHL & DUGGAN (1998) observaram os resultados de FISHER (1964) e sugeriram que o modelo deveria incorporar algumas variáveis geofísicas em suas equações, como: os custos das perfurações e o processo de descobertas de novas reservas. Foi por essa forma que DAHL & DUGGAN (1998) concluíram que o modelo se ajustaria melhor aos dados que vieram a ser observados.

Após a não correspondência dos dados efetivamente observados com os resultados encontrados por FISHER (1964) que os modelos econométrico híbridos foram desenvolvidos. Tais modelos tiveram como objetivo incorporar ao modelo econométrico variáveis geológicas, físicas e regulatórias. Geralmente o modelo híbrido é realizado em dois estágios: primeiro são solucionados os problemas físicos inerentes ao modelo desejado e posteriormente um modelo econométrico é aplicado a fim de solucionar as variáveis econômicas, já incorporando a solução do modelo físico na regressão (PESARAN, 1990).

---

<sup>26</sup> A variável *dummy* é um instrumento utilizado pela estatística para permitir ou invalidar um efeito causal que pode ou não estar em uma regressão. Ou seja, quando um efeito causal  $\beta$  existir em uma regressão (i.e., No exemplo dado: pelo efeito de mercado da OPEP) a variável *dummy* assume o valor 1 auferindo um valor  $\beta$  a regressão, caso este efeito causal não exista em determinado instante da regressão assim a variável *dummy* assumirá o valor 0 auferindo 0 a soma da regressão (GUJARATI, 2000).

KAUFMANN (1990), como CLEVELAND (1990), utilizou um modelo híbrido e avaliou os efeitos dos fatores geológicos; econômicos e políticos sobre a produção de petróleo dos 48 campos norte-americanos entre os anos de 1947 a 1985

O modelo de KAUFMANN (1990) é realizado em dois estágios, o primeiro estágio consiste em ajustar os dados de produção acumulada de petróleo a uma curva logística como a desenvolvida por HUBBERT (1962).<sup>27</sup> Em seguida é estimada uma base dos recursos últimos recuperáveis (URR) de petróleo que será inserida na equação de HUBBERT (1962) a fim de gerar uma curva para estimar a produção de petróleo em um formato bem comportado de sino. Como representado pela curva tracejada da Figura 5 a equação de HUBBERT (1962) utilizada por KAUFMANN (1990) foi:

$$Q_t = Q_\infty / (1 + ae^{-b(t-t_0)}) \quad \text{Eq. 4}$$

A Eq. 4 foi gerada a partir do ajuste dos dados à produção de petróleo acumulada desenvolvido por HUBBERT (1962), onde,  $Q_t$  é a produção acumulada de petróleo;  $Q_\infty$  é o URR<sup>28</sup>;  $a$  e  $b$  são coeficientes de regressão correlacionados a inclinação da curva;  $t$  o ano que será realizado a medição e  $t_0$  o ano de pico da produção<sup>29</sup> de petróleo. Na metodologia de KAUFMANN (1990) a curva em formato de sino é usada em um primeiro passo para representar as mudanças na base física das reservas que não são capturadas totalmente pelos efeitos econômicos.

KAUFMANN (1990) ainda relata que a curva gerada pelo modelo físico Hubbertiano não determina a produção de petróleo completamente, já que não utiliza variáveis econômicas e políticas. Assim se propõe a desenvolver o segundo passo, que parte do erro gerado a partir da diferença entre as taxas de produção observadas pelas taxas de produção estimadas (Eq. 4) pela curva de Hubbert. Essas diferenças são usadas como variáveis dependentes do modelo econométrico e os fatores políticos e econômicos são introduzidos como variáveis independentes. Assim KAUFMANN (1990) combina o modelo de Hubbert com uma análise econométrica dos resíduos e se propõe a quantificar os fatores físicos, econômicos e políticos além de determinar a taxa anual de produção. Por fim a solução da função híbrida de KAUFMANN (1990) é:

---

<sup>27</sup> A curva de HUBBERT (1962) será descrita no capítulo 3.

<sup>28</sup> URR remete à expressão em inglês *Ultimate Recovery Resource* que será mais bem detalhada na descrição do modelo físico de Hubbert no capítulo 3.

<sup>29</sup> O pico de produção é o ponto mais alto; de produção máxima ou o ponto de inflexão na curva de Hubbert. Maiores detalhes ver capítulo 3.

Primeiramente são encontradas as taxas das estimações físicas fazendo a subtração  $PC_t = (Q_{\infty}/l + ae^{-b(t-t_0)}) - (Q_{\infty}/l + ae^{-b(t-t_0-1)})$  que é a diferença de duas produções acumuladas seguidas entre um tempo  $t$  por um tempo  $(t-1)$ , em seguida um erro é gerado ao se comparar as estimações aos dados reais observados:

$$R_t = (P_t - PC_t) / PC_t, \quad \text{Eq. 5}$$

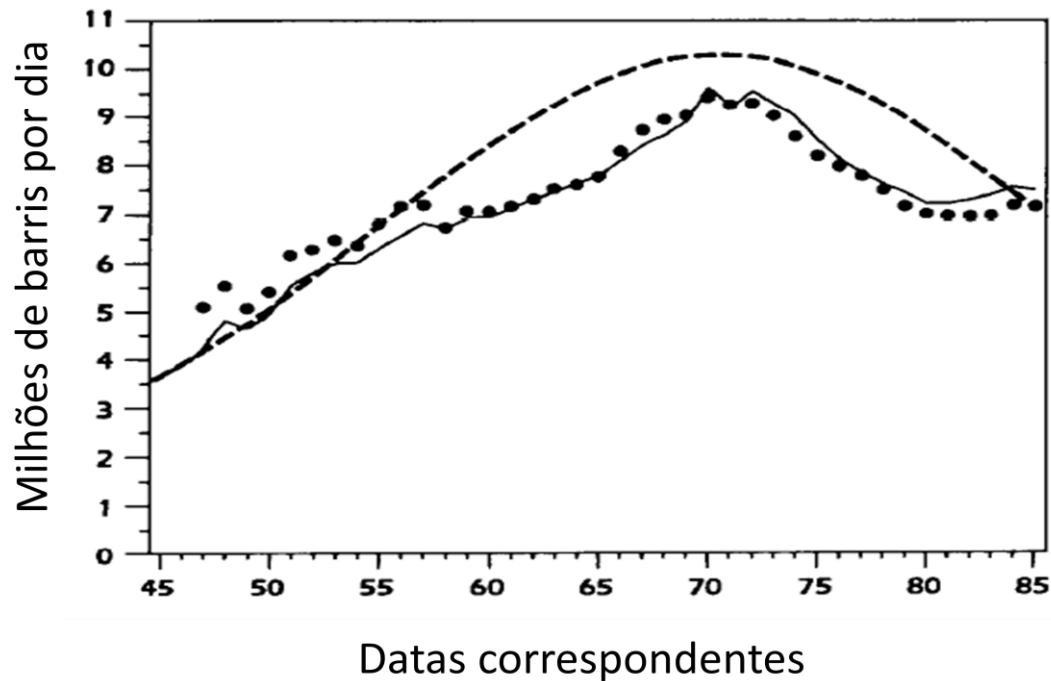
Onde,  $R_t$  é o erro;  $P_t$  são as taxas dos dados observados e  $PC_t$  as taxas estimadas.

Por fim o erro é utilizado como uma variável dependente do modelo; os fatores políticos e econômicos são as variáveis independentes. Assim o modelo econométrico híbrido dado por KAUFMAN (1990) para a análise da produção dos 48 campos norte-americanos é:

$$R_t = \alpha + \beta_1 RP_{(1-2)} + \beta_2 RP_{(3-5)} + \beta_3 OG_t + \beta_4 TRC_t + \beta_5 PC'_t, \quad \text{Eq. 6}$$

Onde,  $RP_{(1-2)}$  é a média dos preços reais que ficou entre um e dois anos;  $RP_{(3-5)}$  é a média dos preços que ficou entre três, quatro e cinco;  $OG_t$  é o preço do petróleo relativo ao gás natural;  $TRC_t$  é a fração da capacidade de produção de petróleo do Texas definida pela *Texas Railroad Commission*;  $PC'_t$  é a primeira taxa estimada da produção de petróleo depois do pico de produção e os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ 's são os coeficientes da regressão.

Os resultados de KAUFMANN (1990) representaram bem os dados observados para o período desejado, como mostrado pela Figura 5:



**Figura 5: Dados observados para o período; dados gerados por um modelo físico simples e dados gerados por um modelo híbrido.**

Fonte: (KAUFMANN, 1990)

A Figura 5 representa os dados adquiridos e gerados por KAUFMANN (1990). A curva representada por pontos refere-se aos dados médios reais obtidos para cada ano analisado pelo autor; a curva tracejada representa os dados gerados pelo modelo físico utilizado pelo autor representado pela Eq. 4; já a curva representada por uma linha contínua indica os dados gerados por KAUFMANN (1990) utilizando seu modelo híbrido descrito pela Eq. 6. Neste último modelo, KAUFMANN (1990) utilizou um método que consiste em combinar as curvas ajustadas de um modelo Hubbertiano a um modelo econométrico. Essa parece ser a tendência do modelo híbrido econométrico utilizado atualmente, como o feito por autores mais recentes (MORONEY & BERG, 1999; RADCHENKO, 2005; KING, DENG & METZ, 2012 e REYNOLDS & BAEK, 2012).

REYNOLDS & BAEK (2012) contestam o fato de que estimativas para a produção de petróleo dependam de qualquer fator econômico. Utilizando um modelo de regressão econométrica denominado *autoregressive distributed lag* (ARDL), os autores

tentaram testar se o modelo de uma curva simples de Hubbert<sup>30</sup> é significativa em determinar os preços do petróleo no mundo, e realizaram o mesmo para a principal determinante de Hotelling, a taxa de desconto. A ARDL utilizada por REYNOLDS & BAEK (2012) é representada pela Eq. 7:

$$P_t = a_0 + a_1 Hub_t + a_2 IR_t + \varepsilon_t \quad \text{Eq. 7}$$

Sujeito à:

$$Hub_t = Q_t/HQ_t \quad \text{Eq. 8}$$

Onde,  $P_t$  é o preço do petróleo;  $IR_t$  é a taxa de desconto de Hotelling;  $Hub_t$  foi um indicador criado por REYNOLDS & BAEK (2012) a fim de comparar a taxa anual de produção mundial de petróleo ( $Q_t$ ) (consumo) e a taxa estimada anual da produção mundial de petróleo ( $HQ_t$ ), dada pelo modelo de curva simples de Hubbert e  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  são os coeficientes estimados na regressão para cada um dos indicadores.

Com as Eq. 7 e Eq. 8 REYNOLDS & BAEK (2012) realizaram testes de significância para avaliar o índice de Hubbert e a taxa de desconto de Hotelling em três cenários possíveis: com as URR variando entre 2,5; 3,0 e 3,5 trilhões de barris de petróleo. Os resultados de REYNOLDS & BAEK (2012) mostraram que a taxa de desconto de Hotelling tem pouca ou nenhuma significância para determinação dos preços do petróleo. Para o teste do indicador de Hubbert, os autores mediram como um desvio em relação à produção idealizada pelo modelo clássico de Hubbert afetou os preços do petróleo cru. Por ser o modelo de Hubbert um modelo físico, os autores buscaram entender como variáveis não físicas (i.e. econômicas) surtiram efeitos sobre os preços de petróleo. Assim, REYNOLDS & BAEK (2012) testaram o nível de significância do indicador de Hubbert que apresentou elevados níveis na explicação de os preços do petróleo. Tais autores ainda concluem que são os efeitos de informação e de escassez<sup>31</sup> que comandam os efeitos de diminuição ou de estabilidade na produção. Assim, a curva de Hubbert tem grande possibilidade de causar a tendência da oferta de petróleo.

Conforme pôde ser observado pelos modelos anteriores, todas as formas de estimações sobre a produção de petróleo em uma região ou no mundo se baseiam

<sup>30</sup> Maiores explicações ver capítulo 3.

<sup>31</sup> Os efeitos informação e de escassez serão mais bem detalhados no capítulo 3.

fundamentalmente nos conceitos desenvolvidos por HOTELLING (1931) ou HUBBERT (1956). REYNOLDS & BAEK (2012), assim como KAUFMANN (1990), observaram que ajustes realizados por variáveis econômicas ao modelo físico Hubbertiano são boas formas de ajustar este modelo aos dados efetivamente observados. Contudo, apesar de as tentativas de hibridização de ambos os modelos terem apresentado boas estimativas comparativas, também revelaram dificuldades estatísticas e/ou divergências conceituais que geraram imprecisões nos modelos (CLEVELAND, 1990; MORONEY & BERG, 1999; RADCHENKO, 2005 e KING, DENG & METZ, 2012).

Portanto, conhecendo a imprecisão qualitativa dos dados da exploração petrolífera brasileira haveria uma desvantagem operacional caso o modelo híbrido fosse o escolhido para a solução de previsão da produção. Por existirem dificuldades probabilísticas e divergências conceituais, ajustar um modelo híbrido a um cenário de pouca confiabilidade nos dados poderia ocasionar resultados pouco explicativos aos dados observáveis. Portanto ao se observar as possíveis dificuldades que o modelo econométrico poderá sofrer nas estimações da produção brasileira de petróleo, pode ser recomendada a utilização de um modelo mais simples, tipo Hubbert, onde erros probabilísticos tenham menor relevância em explicar os dados observados.

### **3 – Considerações Teóricas e Metodológicas sobre o Modelo de Hubbert**

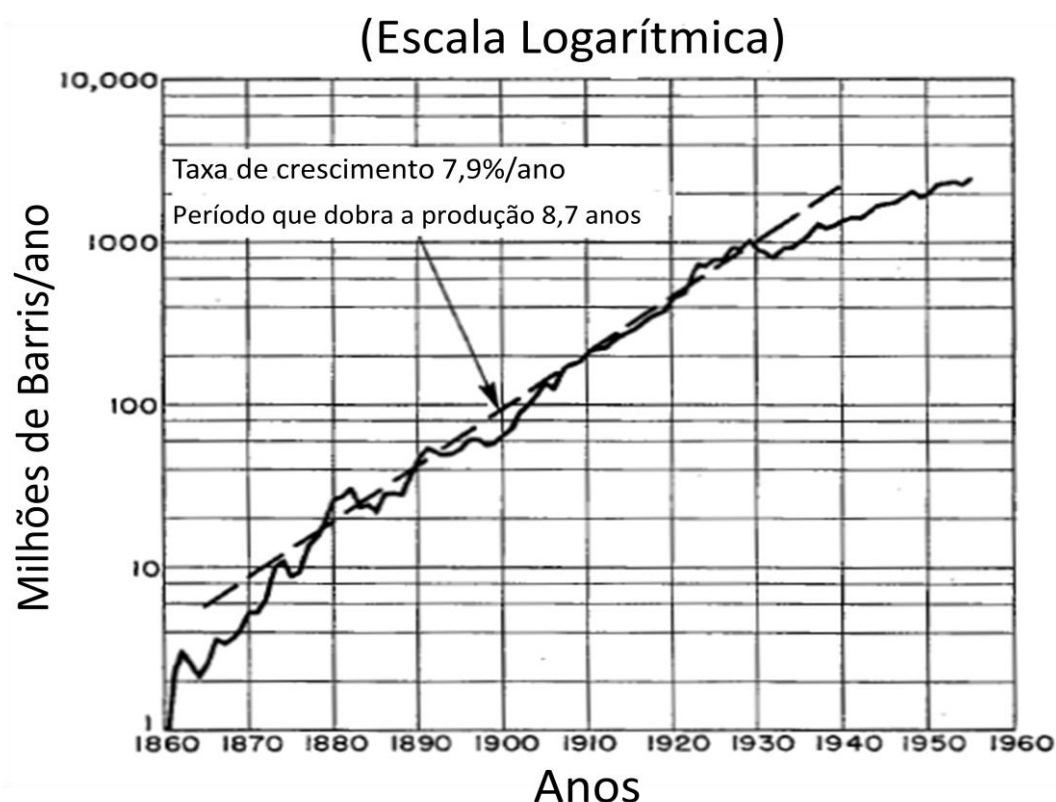
O modelo clássico de HUBBERT (1956) foi desenvolvido sob um cenário onde as principais fontes energéticas do mundo estavam começando a sofrer os efeitos da depleção de suas reservas então conhecidas. Dada a importância dessas fontes para a economia mundial, estudos sobre os efeitos de depleção passaram a ser importantes para a definição de estratégias de exploração e consumo nos países consumidores. Por tais recursos já serem explorados a altas taxas nos Estados Unidos àquela época, a necessidade de se desenvolver um mapeamento sobre como as reservas de tais recursos estavam se comportando foi notada por agências norte-americanas, como *the American Petroleum Institute*, *the American Gas Association*, *the United States Geological Survey*, dentre outras, que buscaram estimar a quantidade remanescente de cada recurso e o tempo em que essas quantidades sustentariam a evolução dos níveis de produção (HUBBERT, 1956).

HUBBERT (1956), através de um contrato com a *Shell*, buscou atender a questão da companhia sobre a viabilidade de investimentos em fontes de energia nuclear. Para justificar uma possível introdução de fontes nucleares nos Estados Unidos, HUBBERT (1956) analisou e entendeu as formas de exploração e produção dos recursos exauríveis – neste caso, urânio. A ideia central compreendida pelo autor foi que as formas de exploração ocorrem inicialmente sob taxas crescentes, onde tais taxas se elevam até um pico de produção (i.e. ponto de máxima ocorrência) e, passado este pico, essas taxas decresceriam até o momento de exaustão das reservas. Quando sua projeção para o pico do petróleo dos 48 campos norte-americanos foi comprovada na década de 1970, o modelo de HUBBERT (1956, 1962) passou a ser amplamente utilizado em trabalhos que buscam encontrar o pico de produção de petróleo.

#### **3.1. A descrição do modelo clássico de Hubbert:**

HUBBERT (1956) notou que o processo de exploração das principais fontes energéticas ocorria inicialmente através de descobertas de recursos e, em seguida, uma fração era recuperada das mesmas. O autor observou também que antes eram encontrados recursos em campos maiores para depois serem encontrados campos menores. Com essas observações HUBBERT (1956) analisou os dados das principais

fontes energéticas da época (petróleo; carvão e gás) produzidas nos Estados Unidos e mundialmente e notou a existência de um padrão entre esses dados. Os ritmos de produção geralmente iniciavam com um nível de exploração lento que iria crescendo exponencialmente até alcançar um volume de produção máxima, a partir do qual começava a decair até não ter mais produto a ser explorado<sup>32</sup>. Após ter analisado esses dados o autor estimou duas taxas médias de crescimento da produção de petróleo<sup>33</sup> para os Estados Unidos, a fim de estimar o ritmo de produção. Essas taxas são observadas na Figura 6:



**Figura 6: Produção de petróleo bruto nos Estado Unidos desenhado em uma escala semilogarítmica:**

Fonte: (HUBBERT, 1956)

<sup>32</sup> Esses três efeitos percebido por HUBBERT (1956) foram notados observando principalmente o comportamento de campos de petróleo que já haviam atingido seu nível máximo de produção em dada época, como as produções do campo de Ohio. Maiores detalhes ver: HUBBERT (1956).

<sup>33</sup> Em seu texto original, HUBBERT (1956) fez análises a respeito de todas as principais fontes energéticas de recursos exauríveis presentes na época (petróleo, carvão, gás e urânio), contudo a análise de interesse para esta dissertação é a de produção do petróleo, por isso a particularização desta fonte primária de energia.

A Figura 6 representa o gráfico desenvolvido por HUBBERT (1956) para mostrar a produção de petróleo bruto nos Estados Unidos desde o início das explorações com o coronel *Drake* em 1859 até 1955, último dado adquirido pelo autor. Por essa curva, HUBBERT (1956) estimou uma taxa média de crescimento da produção, assim como, um período médio em que a produção dobraria seu volume entre determinados anos.

Considerando o efeito de depleção dos recursos finitos e partindo dos dois conceitos observados na Figura 6, HUBBERT (1956) indagou qual seria a capacidade limite de incremento na produção de petróleo. Compreendendo o fato de que recursos exauríveis não sustentariam por logo tempo taxas de crescimento de produção ilimitadas, o autor realizou a seguinte suposição: supôs  $n$  períodos de dobra do volume da produção, que dessa forma teria um comportamento a cada período no formato do tipo  $2^n$  sobre o período inicial. Após 10 períodos observados, supondo uma produção inicial de 100 milhões de barris/ano, a produção de petróleo ultrapassaria os 100 bilhões de barris/ano no final dos períodos, o que para o autor era algo que não poderia acontecer devido aos limites físicos presentes nos recursos finitos.

Assim, HUBBERT (1956) considerou que a forma mais efetiva para desenvolver extrapolações das curvas de crescimento da produção petrolífera deveria ser realizada seguindo duas considerações básicas: a primeira relacionada à curva de um recurso finito com uma quantidade definida, onde é suposto um eixo  $x$  representado pelo tempo  $t$  e um eixo  $y$  que representa a taxa de produção  $P$ . Esta taxa deveria ter sua representação numérica igual a zero nos instantes de início da exploração em  $t=0$  e no momento em que as reservas estariam exauridas em  $t=\infty$ . Portanto, HUBBERT (1956) propôs uma curva onde a taxa de produção começaria sendo zero (i.e. nenhuma produção); cresceria até uma taxa máxima de produção (i.e. ponto de inflexão); para depois decrescer até regredir ao eixo com zero de produção novamente (i.e. o montante total da reserva estaria exaurido). A segunda consideração de HUBBERT (1956) parte da integral de uma função do tipo  $y=f(x)$  como exposto pela Eq. 9:

$$\int_0^{x_1} y dx = A \quad \text{Eq. 9}$$

Onde  $A$  é a área entre a curva formada por  $y=f(x)$  e o eixo  $x$  indo da origem até a distância  $x_1$ .

Sendo a curva de produção desenhada pela linha contínua na Figura 6 a produção pontual a cada ano apontado é dada por:

$$P = dQ/dt \quad \text{Eq. 10}$$

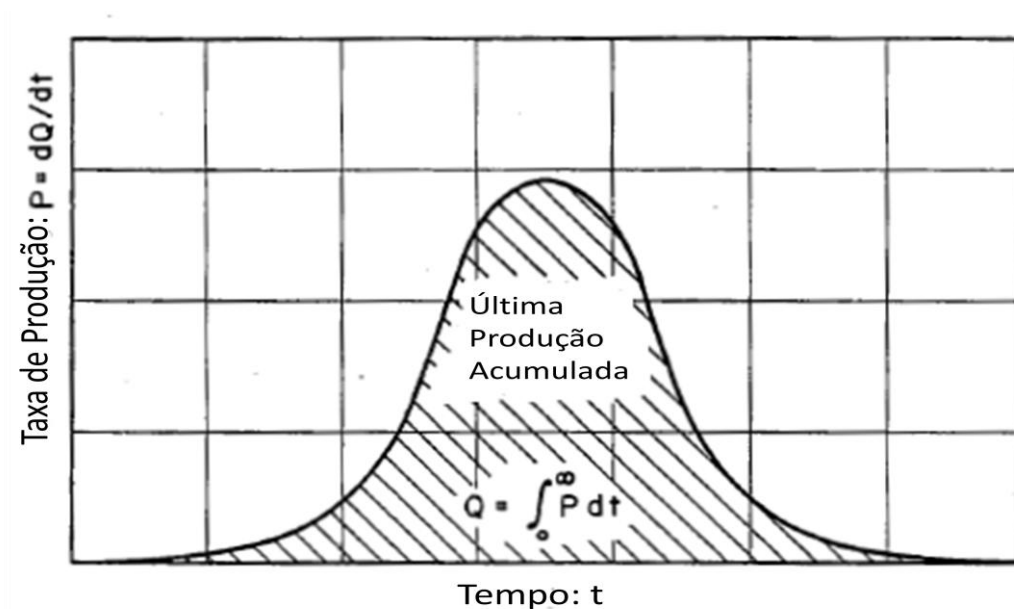
Onde  $dQ$  é a produção unitária de determinado ano  $dt$ . Portanto, se tem da Eq. 9:

$$A = \int_0^t P dt = \int_0^t (dQ/dt) dt = Q \quad \text{Eq. 11}$$

Onde  $Q$  é a produção acumulada, do tempo  $0$  ao tempo de produção desejado  $t$  (no caso de HUBBERT (1956) seria do ano 1859 a 1955). Então, para se obter o total de reserva que será aproveitada em todo o ciclo de produção do petróleo se tem:

$$Q_{max} = \int_0^{\infty} P dt \quad \text{Eq. 12}$$

$Q_{max}$  corresponde à quantidade total de produto que é possível de ser extraída, ou a última produção acumulada (UPA) ou reservas últimas recuperáveis (URR). A produção total de tais reservas será representada pela área contida entre a curva da Figura 7 e o eixo  $x$ :

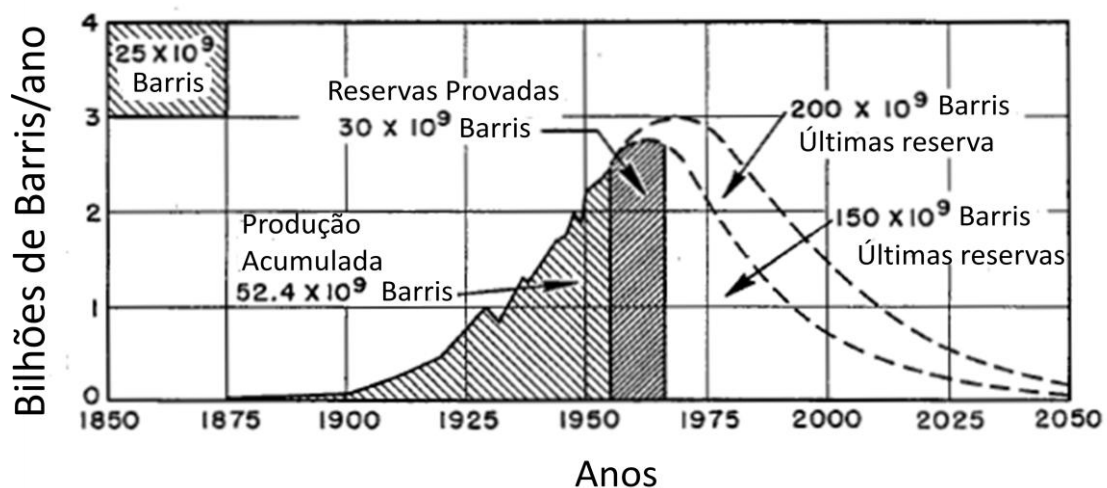


**Figura 7: Relação envolvendo um ciclo completo de produção de qualquer recurso exaurível**

Fonte: (HUBBERT, 1956)

A Figura 7 representa a curva simples desenvolvida por HUBBERT (1956). Tal curva correlaciona a taxa de produção  $P=dQ/dt$  com o tempo  $t$  e corresponde à representação gráfica estabelecida pela Eq. 12. A integral da produção no tempo deve considerar uma restrição a respeito da magnitude da Última Produção Acumulada<sup>34</sup>, que deverá ser menor ou no limite igual à quantidade total de recurso existente no início das explorações. A partir dessa restrição, HUBBERT (1956) mostra que, ao se estimar uma quantidade inicial total de reserva, seria possível desenhar uma família de curvas de produção que representariam os níveis de produção de um campo, país ou mundo. Tais curvas devem exibir a mesma quantidade de reserva inicial. Porém, essa família de curvas que foram inicialmente propostas por HUBBERT (1956) ainda não tinha uma representação matemática definida e derivava de uma série de adequações a dados observados pelo autor, que, quando extrapolados, desenhariam a curva de Hubbert.

Com seus conceitos estabelecidos e um formato de curva já proposto, HUBBERT (1956) avançou em seu trabalho propondo estimar o ciclo completo da produção de petróleo norte-americana da época. O autor utilizou duas bases de reservas estimadas para os 48 campos norte-americanos, que seriam de 150 e 200 bilhões de barris de petróleo. A apresentação gráfica elaborada por HUBBERT (1956) está representada pela Figura 8:



**Figura 8: Última produção de petróleo norte-americana baseado em reservas iniciais assumidas em 150 e 200 bilhões de barris:**

<sup>34</sup> Última Produção Acumulada (UPA) se refere à produção acumulada no tempo de exaustão do produto, esse termo foi utilizado por HUBBERT (1956) como *Ultimate Cumulative Production* (UCP), Seria o mesmo montante de recursos recuperados estabelecido pelas Últimas Reservas Recuperáveis (URR).

Fonte: (HUBBERT, 1956)

A Figura 8 mostra o gráfico da produção de petróleo dos Estados Unidos para o ano de 1956 e duas extrapolações para datas futuras. Como previsto, HUBBERT (1956) utilizou uma suposição de adequação aos dados observados, onde a taxa de produção norte-americana ainda não teria atingido sua capacidade máxima. A taxa de pico da produção somente ocorreria alguns anos mais tarde, pois o volume de reservas ainda existentes no subsolo sustentariam níveis de produção maiores que o observado em 1956. A extrapolação de HUBBERT (1956) também considerou a possibilidade de novas descobertas, o que possibilitaria um atraso no pico da produção além de ser um fator atenuante à taxa de depleção. Tal fato pôde ser observado na diferença das extrapolações entre as duas estimações adotadas pelo autor. A grande importância do trabalho de HUBBERT (1956) foi que as curvas estimadas por ele tiveram grande precisão na previsão do pico de produção dos 48 campos dos Estados Unidos, que veio efetivamente a acontecer no início da década de 1970 (CAVALLO, 2004; REHRL & FRIEDRICH, 2005; BRANDT 2006; SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER 2007; MAGGIO & CACCIOLA, 2009 e 2012; MOHR, 2010).

É importante notar que o trabalho pioneiro escrito por HUBBERT (1956) não teve qualquer representação matemática sobre como chegar ao formato da curva. Ao contrário, tal formato foi desenhado através de uma adequação aos dados observados pelo autor. Uma representação matemática do formato da curva de Hubbert foi desenvolvida pelo próprio autor em HUBBERT (1962), onde o mesmo introduziu uma exposição lógica, a fim de introduzir ao modelo, diferentes estimativas que as reservas de petróleo norte-americanas tiveram após sua primeira publicação em 1956. Com estimativas variando entre 145 bilhões de barris de petróleo (Pratt, 1956) a 590 bilhões de barris (Zapp (U.S.G.S), 1961) a primeira preocupação de HUBBERT (1962) foi de adequar um modelo matemático às possíveis variações<sup>35</sup> que reservas provadas podem ter. Ao incorporar essas possíveis alterações, o autor possibilitaria ajustes mais simples aos formatos de curvas gerados pelas diferentes estimativas propostas à época.

HUBBERT (1962) apresenta sua solução supondo uma representação para as descobertas provadas acumuladas cujo símbolo foi representado por  $Q_D$ . Tal descoberta

---

<sup>35</sup> Como já abordado, as reservas 1P; 2P e 3P podem passar por reclassificação entre si e com o conceito de recurso, devido ao aprimoramento tecnológico e evolução econômica. Ver capítulo 2 conceitos de recurso e reserva.

depende de dois fatores: a produção acumulada  $Q_p$  e as reservas provadas  $Q_R$ . Assim para cada ano as reservas provadas acumuladas se comportam conforme a Eq. 13:

$$Q_D = Q_p + Q_R \quad \text{Eq. 13}$$

Assim, a relação entre as taxas de cada quantidade é fornecida derivando a Eq. 13 em função do tempo e assim sendo obtido a seguinte formulação:

$$dQ_D/dt = dQ_p/dt + dQ_R/dt \quad \text{Eq. 14}$$

Onde  $dQ_D/dt$  é a taxa de descoberta;  $dQ_p/dt$  é a taxa de produção e  $dQ_R/dt$  é a taxa de incremento as reservas provadas.

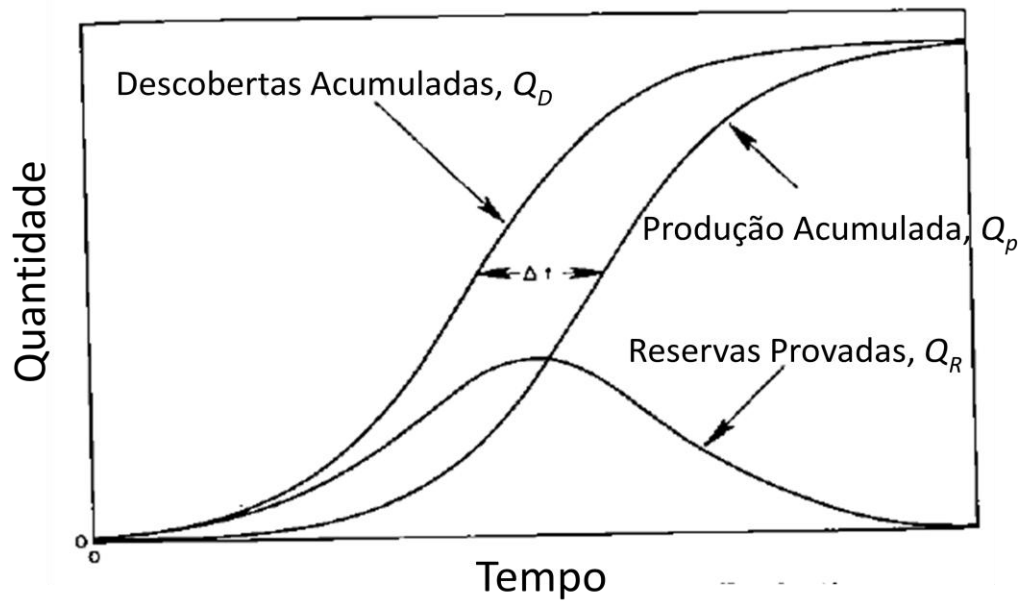
Dessa forma foi observado que as três variáveis  $Q_D$ ;  $Q_p$  e  $Q_R$  devem variar com o tempo durante toda a história da produção de petróleo e assim cada uma deve apresentar as seguintes formas de estrutura:

1. A curva produção acumulada  $Q_p$  aumentará de forma lenta com o tempo, no início das explorações; crescerá rapidamente até um ponto a partir do qual aumentará com ganhos de escalas decrescentes até alcançar a quantidade total de produto  $Q_\infty$  ou  $Q_{max}$ .
2. A curva de reservas provadas  $Q_R$  começa em zero e aumentará até um ponto de máximo e, então, gradativamente decrescerá até chegar à zero novamente.
3. Já a curva de descobertas provadas acumuladas  $Q_D$  possui uma característica importante quando comparada à curva de produção acumulada, pois ambas possuem uma forma bem similar, contudo a curva de descobertas acumuladas ocorre com algum tempo de antecedência à curva de produção acumulada. Esse fato pode ser explicado pela característica de exploração de recursos não renováveis, onde primeiro o recurso será explorado para então poder ser extraído. Essa forma de produção acarreta em um atraso  $\Delta t$  no tempo entre a descoberta e a produção<sup>36</sup>.

A Figura 9 ilustra bem o comportamento de essas três curvas do modelo:

---

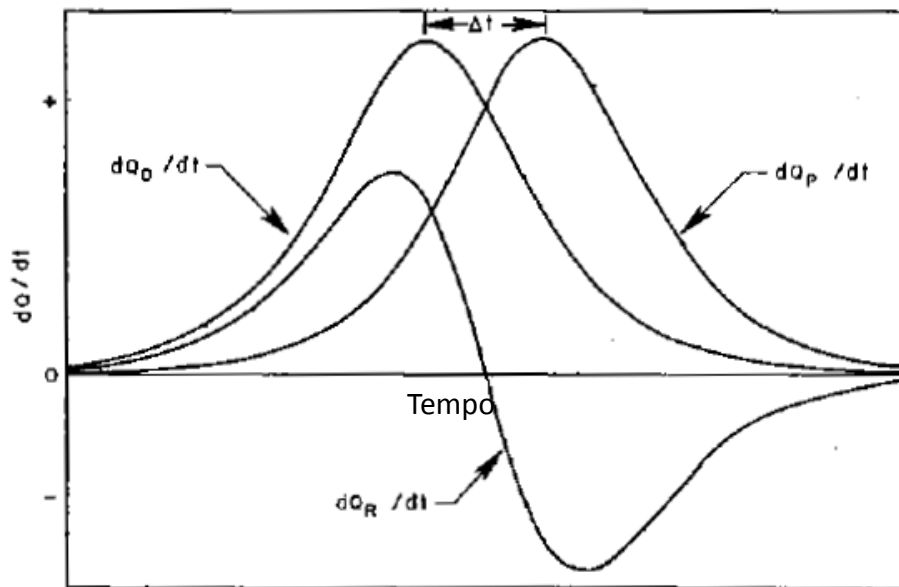
<sup>36</sup> Essa observação é uma hipótese importante da modelagem Hubbertiana. Porém, ao se observarem as curvas de exploração e produção da OPEP, a partir da década de 1970, percebe-se que esta hipótese não é mais válida para os países membros desta organização: sua curva de produção segue índices bem abaixo da sua curva de descobertas, seja devido a eventos geopolíticos, seja, a partir de 1983, devido ao estabelecimento de quotas de produção. Maiores informações ver LAHERRERE (2009) e PIPPENGER e REYNOLDS (2010).



**Figura 9: Descobertas e Produção acumuladas e reservas provadas:**

Fonte: HUBBERT, 1962

A Figura 9 ilustra bem o comportamento das três variáveis inicialmente consideradas por HUBBERT (1962), e mostra bem a similaridade entre as curvas de produção e descobertas acumuladas. Com tais curvas possuindo um mesmo início e um mesmo fim, o autor concluiu que o estudo da curva de descobertas acumuladas é uma prévia do que ocorrerá com a curva de produção acumulada com um atraso de  $\Delta t$  períodos. Esse mesmo efeito também pôde ser notado nas curvas: da taxa de descobertas ( $dQ_D/dt$ ) e da taxa de produção ( $dQ_p/dt$ ), como mostrado na Figura 10:



**Figura 10: Taxas de Descoberta, Produção e Mudança nas Reservas Provadas:**

Fonte: HUBBERT (1962)

A Figura 10 mostra o comportamento da taxa de produção ( $dQ_P/dt$ ); da taxa de descobertas ( $dQ_D/dt$ ) e da taxa de incremento as reservas provadas ( $dQ_R/dt$ ), assim como, o efeito retardado em  $\Delta t$ , entre as taxas de produção e descobertas. Uma característica que deve ser notada pela Figura 10 está na relação entre os formatos das curvas das taxas de descobertas e de produção com a curva apresentada por HUBBERT (1956) da taxa de produção. As três curvas apresentadas possuem um padrão de comportamento muito similar, iniciando com um fator crescente à produção; que vai aumentando até atingir pico de descobertas ou produção e, por fim, decai até a exaustão das mesmas. Tal relação entre essas curvas têm o mesmo princípio de formação e é exatamente o efeito que explica o formato da curva simples de Hubbert. Portanto, o que foi percebido é que o modelo geométrico desenvolvido pelo autor em seu trabalho em 1956 foi mantido em uma representação matemática, que passou a incorporar os conceitos variáveis de reservas, permitindo que HUBBERT (1962) desenvolvesse uma representação matemática simples para detalhar seu modelo.

Essa representação matemática foi descrita em HUBBERT (1962) como um fenômeno de crescimento tal como o representado pelas curvas  $Q_D$  e  $Q_P$ , que ocorre com um início lento, acelera gradativamente e finalmente chega a um nível máximo. Esse fenômeno foi reconhecido por seguir uma curva do tipo logística, que pode ser descrita por uma equação empírica como a Eq. 15:

$$y = h/(1+ae^{-bx}) \quad \text{Eq. 15}$$

Onde  $h$ ;  $a$  e  $b$  são parâmetros que devem ser descobertos pelos dados já observados,  $e$  é à base de número neperiano. Ao se adaptar a Eq. 15 aos dados requeridos na medição de uma curva de produção de recursos exauríveis, HUBBERT (1962) desenvolveu a seguinte equação:

$$Q_D = Q_\infty/(1+ae^{-bt}) \quad \text{Eq. 16}$$

Onde  $Q_\infty$ <sup>37</sup> é o valor ao qual  $Q_D$  irá tender no limite do tempo  $t$ , quando já não houver mais reservas provadas  $Q_R$ <sup>38</sup>, ou seja,  $Q_\infty$  será o último nível de recurso técnica-economicamente capaz de ser explorado em todo o ciclo de produção de um recurso natural exaurível.

A Eq. 16 é a representação matemática para a curva de HUBBERT (1956). Tal equação foi a forma encontrada por Hubbert de representar como a produção de um campo de exploração, um país ou do mundo deverá se comportar com o passar do tempo. O formato de curva proposto por HUBBERT (1956 e 1962) para prever o comportamento da produção de petróleo foi estabelecido por uma única curva simples, onde a produção partindo de zero cresceria, atingiria um único pico e depois decairia a zero ao final das reservas.

Devido ao êxito do modelo em relação aos dados observados sobre a produção norte-americana do início da década de 1970, o modelo simples de Hubbert passou a ser utilizado e reinterpretado por diversos autores posteriores a HUBBERT (1956). O desenvolvimento matemático de HUBBERT (1962) possibilitou interpretações a respeito do funcionamento da curva. KAUFMAN (1990); MORENEY & BERG, (1999) CAVALLO (2004); REHRL & FRIEDRICH (2006); SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) e MOHR (2010) são alguns dos autores que desenvolveram estudos descrevendo e utilizando o modelo de Hubbert em suas análises. Tais estudos, salvo pequenas variações em algumas interpretações, seguem a linha de pensamento que foi bem relatada por SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007).

---

<sup>37</sup> Na literatura, os termos para descrever  $Q_\infty$  são Últimas Reservas Recuperáveis (URR) (*Ultimate Reserve Recovery*); Últimas Reservas Estimadas (EUR) (*Estimated Ultimate Reserves*) ou Última Produção Estimada (EUP) (*Estimated Ultimate Production*).

<sup>38</sup> Outra nota importante é que na literatura  $Q_\infty$  pode ser representado por outras notações como:  $Q_T$ ,  $Q_{max}$ ,  $U$ .

Para SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) a base da teoria de Hubbert parte de um efeito informação ( $EI(t)$ ) sobre as reservas de petróleo que tenderá a crescer proporcionalmente às descobertas acumuladas ( $CD(t)$ ) no tempo:

$$EI(t) \propto CD(t) \quad \text{Eq. 17}$$

Assim a taxa de descoberta que inicialmente é pequena deverá crescer de acordo com a evolução do efeito de informação que, por sua vez, advém de novas descobertas e, portanto, com as descobertas acumuladas:

$$\delta CD(t)/\delta t \propto EI(t) \therefore \delta CD(t)/\delta t \propto CD(t) \quad \text{Eq. 18}$$

Entretanto, descobertas acumuladas estão limitadas pela quantidade de recursos (*oil in place*), independente do nível de informação acumulado, ou seja, o progresso técnico aumenta o conhecimento (i.e. reservas), mas não o recurso em si. Assim, a taxa de descoberta também deverá cair com as descobertas acumuladas, considerando-se que existe uma quantidade fixa de recurso ( $Q_\infty$ ) disponível (i.e. efeito depleção).

$$\delta CD(t)/\delta t \propto (Q_\infty - CD(t)) \quad \text{Eq. 19}$$

Por fim SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) notaram que existe um efeito informação que agrega volume às reservas e, assim, maior quantidade de produto para a produção, mas também existe o efeito depleção das reservas que limita a um nível máximo a produção. Concluem, assim, que a representação algébrica para a taxa de descoberta que engloba o efeito depleção (negativo) e o efeito informação (positivo) é:

$$\delta CD(t)/\delta t \propto CD(t) \cdot (Q_\infty - CD(t)) \quad \text{Eq. 20}$$

Portanto, os efeitos de depleção e informação expostos por SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) têm o mesmo comportamento dos efeitos de taxas de produção e incremento das reservas propostos por HUBBERT (1962). É dessa forma que SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) apresentam a solução matemática da Eq. 20 que é a mesma solução do problema de estimação do pico de produção de petróleo apresentada por HUBBERT (1962), e exposto na Eq. 21:

$$CD(t) = Q_\infty / (1 + e^{-b(t-t_0)}) \quad \text{Eq. 21}$$

É fácil observar que a Eq. 21 e a Eq. 16 são praticamente as mesmas, diferindo por dois fatores: pela constante  $a$  e pela expressão  $(t-t_0)$ . Dada ocorrência é devido à

solução da constante  $a$ , que quando resolvida pela expressão  $a=(Q_{\infty}/Q_0)-1$  resulta na expressão  $(t-t_0)$  (MOHR, 2010). Essa formação lógica que resultou na Eq. 21 é a síntese do pensamento Hubbertiano apresentada pela maioria dos autores que se utilizaram deste modelo, para realizar suas estimações do pico do petróleo (KAUFMANN, 1990; MORENEY & BERG, 1999; CAVALLO, 2004; REHRL & FRIEDRICH (2006) e MOHR, 2010). Neste caso,  $CD(t)$  são as descobertas acumuladas ou produção acumulada<sup>39</sup>,  $Q_{\infty}$  é máximo de recurso disponível (Últimas Reservas Recuperáveis, URR);  $b$  é uma constante relacionada à inclinação da reta;  $t$  é o tempo em que se estima  $CD(t)$  e  $t_0$  é a metade do tempo de se produzir  $Q_{\infty}$  ou o tempo de pico da produção.

Para encontrar o nível de produção discreto, ou seja, o nível de produção de cada ano, vários autores utilizaram diferentes soluções partindo de um mesmo ponto inicial, que é a Eq. 21. KAUFMANN (1990); MORENEY & BERG (1999); CAVALLO (2004) e SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) utilizaram derivações e substituições<sup>40</sup> sobre a curva de produção acumulada para encontrarem a produção  $P$  em  $t$ . Já MOHR (2010); BRANDT (2007, 2010) e NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH (2010a) se utilizaram de uma aproximação polinomial<sup>41</sup>. Porém a maioria desses autores convergiu para uma mesma solução da taxa de produção, onde:

$$P = 2P_m / (1 + \cosh(-b(t-t_0))) \quad \text{Eq. 22}$$

Sendo:

$$b = (4P_m / Q_{\infty}) = 5/c \quad \text{Eq. 23}$$

Assim,

$$Q_{\infty} = 0,8 P_m * c \quad \text{Eq. 24}$$

Onde,  $P$  é a produção em  $t$ ;  $P_m$  é o pico da produção ou a produção em  $t_0$ ;  $t_0$  é o tempo em que ocorrerá o pico da produção, já  $b$  e  $c$  são parâmetros obtidos através da definição de  $Q_{\infty}$  e da estimativa de extensão da vida útil média dos campos (i.e. como

<sup>39</sup> Como já observado em HUBBERT (1962) as curvas de descobertas e produção possuem o mesmo formato sendo diferenciadas por um delta. As informações que irão definir se a medição é uma descoberta ou uma produção estará contida em os dados introduzidos na fórmula para a realização das estimações.

<sup>40</sup> O desenvolvimento matemático que KAUFMANN, 1990; MORENEY & BERG, 1999; CAVALLO, 2004 e SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) utilizaram para alcançar a formulação discreta da produção de petróleo pode ser encontrada em Apêndice A.

<sup>41</sup> A matemática de aproximação polinomial utilizada por MOHR (2010); BRANDT (2007, 2010) e NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH (2010a) está em Apêndice B.

exemplo: pode-se citar o caso dos campos do Brasil que têm em média 27 anos de vida útil) (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007).

Dos autores citados, BRANDT (2007) utilizou um formato diferente do apresentado pela Eq. 22, onde apresentou o modelo Gaussiano da produção de petróleo para solucionar o problema de pico da produção, que segue a solução dada pela Eq. 25:

$$P = P_m * e^{(-(t-t_0)/\delta)} \quad \text{Eq. 25}$$

Onde,  $\delta$  é um padrão de desvio da curva de sino apresentada por Hubbert originalmente.

Apesar de o modelo simples de Hubbert ter obtido um resultado muito próximo à realidade dos dados observados para os 48 campos norte-americanos, trabalhos mais recentes (LAHERRERE, 1997, 2001, 2003, 2009, 2011 e 2012; MORENEY & BERG, 1999; CAVALLO, 2004; REHRL & FRIEDRICH, 2006; SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; BRANDT, 2007 e 2010; NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH, 2010a; MOHR, 2010 e MAGGIO & CACCIOLA, 2010 e 2012) a respeito de previsão de produção do petróleo criticam negativamente o modelo simples proposto por HUBBERT (1962). Esses autores alegam que o modelo simples é incapaz de retratar com a mesma precisão observada no início da década de 1970 o formato de uma curva de exploração em outras regiões do mundo, ou mesmo, o formato da atual produção dos Estados Unidos. Dessa forma esses autores afirmam que o modelo de Hubbert precisa ser refinado para se adequar aos dados efetivamente observados nesse século e meio de produção de petróleo e cada um propõe uma maneira diferente de adequar o modelo.

### **3.2. Outras formas de utilização da curva de Hubbert:**

Como observado, a aplicação da curva simples de Hubbert resultou em uma boa adequação aos dados dos 48 campos norte-americanos. Contudo, estimativas recentes revelaram que o modelo simples de Hubbert não representa com boa adequação os dados observados em grande parte das áreas de exploração de petróleo, inclusive para a totalidade da produção dos Estados Unidos. Foi partindo dessa constatação que autores propuseram inovações ao modelo clássico a fim de adequá-lo a essa nova situação (KAUFMAN, 1990; LAHERRERE 1997, 2001, 2003, 2009, 2011 e 2012; MORENEY

& BERG, 1999; CAVALLO, 2004; REHRL & FRIEDRICH, 2006; BRANDT, 2007; MOHR, 2010 e MAGGIO & CACCIOLA, 2010 e 2012).

MOHR (2010) propôs uma forma diferente de estimar curvas de produção a qual ele chamou de “solução superior<sup>42</sup>”. Nesta proposta, o autor tentaria incorporar ao modelo as grandes interrupções da produção de petróleo, que ocorreram em grandes choques de petróleo. O modelo conhecido como: *Generalised Bass model* é um modelo equivalente ao modelo de Hubbert com a diferença de incorporar em sua solução tais interrupções na produção. O modelo foi representado da seguinte forma:

$$Q(t) = QT * \{1 - \exp[(r_1 + r_2) * \int_0^t x(t) dt]\} / \{1 + [(r_1/r_2) * \exp(-(r_1 + r_2) * \int_0^t x(t) dt)]\} \quad \text{Eq. 26}$$

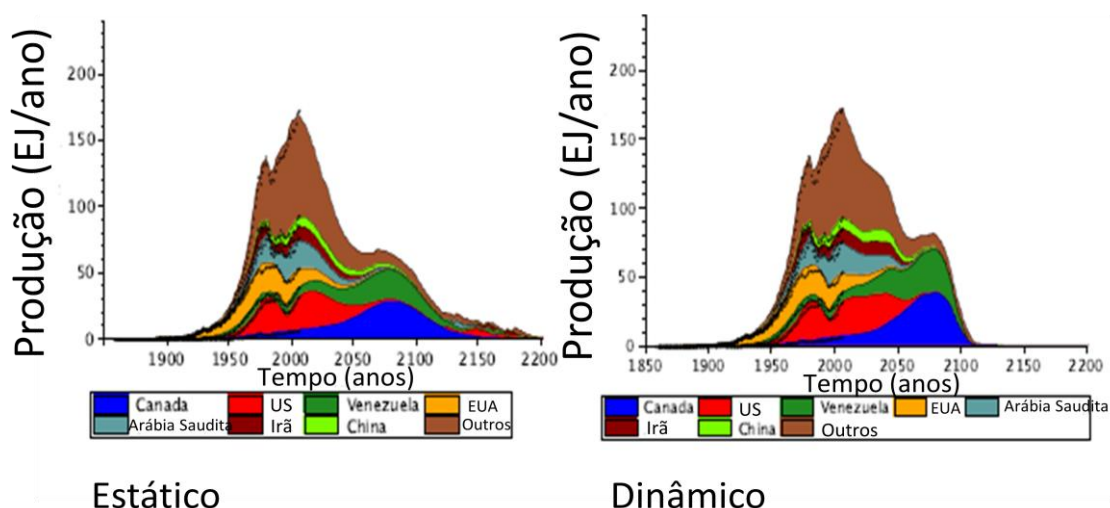
Onde,  $Q_T$  é a URR;  $Q(t)$  é a produção acumulada;  $r_1$  e  $r_2$  são taxas constantes e  $x(t)$  é a função responsável por incorporar ao modelo possíveis interrupções de produção. Caso não haja interrupções então  $x(t)=1$ . Sem interrupções a equação expressa por MOHR (2010) será matematicamente equivalente à equação da curva simples de Hubbert. Para observar esse fato, a *Generalised Bass model* sem interrupções é mostrada pela Eq. 27:

$$Q(t) = QT * \{1 - \exp[(r_1 + r_2) * t]\} / \{1 + [(r_1/r_2) * \exp(-(r_1 + r_2) * t)]\} \quad \text{Eq. 27}$$

Segundo MOHR (2010), este modelo é uma evolução do modelo Hubbertiano já que permite a fácil introdução das interrupções. MOHR (2010) faz diversas suposições sobre previsões de carvão; gás e petróleo detalhando a produção de cada país, assim como a produção mundial. Assim, realizou previsões utilizando, para cada situação, três diferentes valores de URR em três modelos diferentes: estático; dinâmico e independentemente dinâmico. O modelo estático se refere a um modelo de estimação com ofertas e demandas estáticas, sem variações; o modelo independentemente dinâmico prevê ofertas e demandas variando de acordo com funções elaboradas pelo autor e o modelo dinâmico varia de forma similar ao modelo independentemente dinâmico, mas com uma função de demanda dependendo de outros fatores. A ilustração do modelo de MOHR (2010) é representada pela Figura 11 que mostra um caso estático e um dinâmico correspondentes:

---

<sup>42</sup> O termo utilizado por MOHR (2010) foi *superior solution*.



**Figura 11: Modelos de previsões da produção mundial de petróleo, com separações dos principais produtores: modelos estático e dinâmico.**

Fonte: MOHR (2010)

A Figura 11 representa dois dos modelos de previsão da produção de petróleo elaborados por MOHR (2010), um estático e um dinâmico. O caso representado é a previsão mundial de petróleo separando por diferentes cores os principais países produtores; ambas as figuras têm como estimativa do pico de produção 172 exajoules / ano (EJ/ano) e correspondem a uma boa ilustração das previsões realizadas por MOHR (2010).

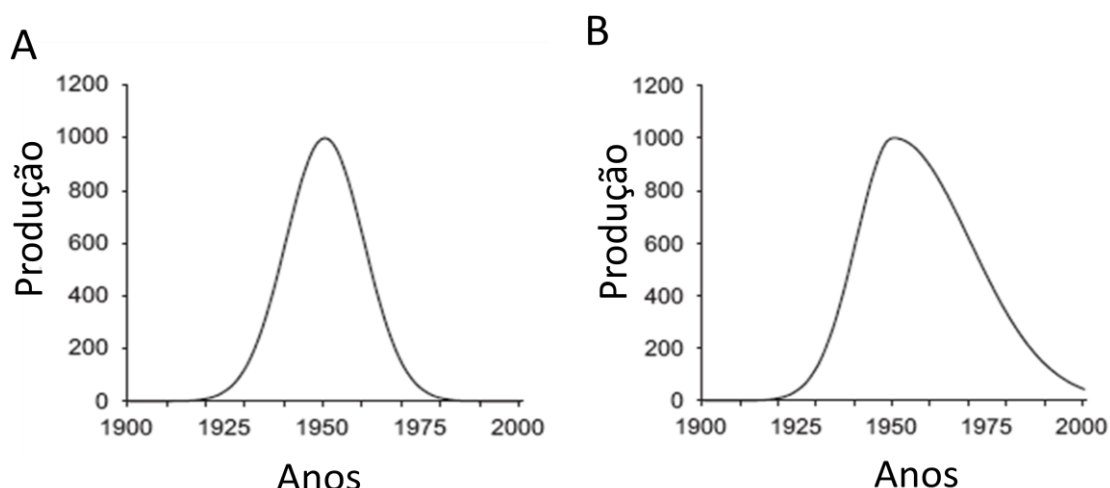
Outra proposta de modificação do modelo Hubbertiano foi elaborada por BRANDT (2007), que testou um modelo onde existiriam dois padrões que modificariam a curva do caso clássico proposto por Hubbert. Tais modificações causariam desvios no formato da inclinação das curvas de estimação. O primeiro seria um padrão que modificaria o lado esquerdo da curva de estimação, ou seja, o lado em que a curva de produção estaria em sua região crescente ( $\sigma_{cresc}$ ). O segundo seria um padrão que modificaria o lado direito da curva, ou seja, o caso em que a curva de estimação já estaria em sua região decrescente ( $\sigma_{dec}$ ). Assim BRANDT (2007) utiliza uma versão assimétrica da curva Gaussiana para testar a não simetria entre uma extensa base de dados da produção de petróleo mundial:

$$P(t) = P_m * \exp[-(t-t_m)^2 / (2f(t)^2)] \quad \text{Eq. 28}$$

Sendo:

$$f(t) = \sigma_{dec} - (\sigma_{dec} - \sigma_{cresc}) / (1 + e^{k(t-t_m)}) \quad \text{Eq. 29}$$

Onde,  $\sigma_{dec}$  e  $\sigma_{cresc}$  são os padrões de alargamento das curvas de estimação;  $k$  controla a taxa em que os padrões  $\sigma$  trocam de crescente ( $\sigma_{cresc}$ ) para decrescente ( $\sigma_{dec}$ );  $t_m$  é o tempo em que a curva de estimação atinge o pico de produção;  $P(t)$  é a produção acumulada e  $P_m$  são as URR ou a Produção Acumulada Final. A ilustração da diferença entre o modelo de Hubbert clássico e o modelo proposto por BRANDT (2007) pode ser observado pela Figura 12:



**Figura 12: Ilustração esquemática: A) Curva Gaussiana de Hubbert da produção e B) Curva Gaussiana de Hubbert assimétrica da produção.**

Fonte: BRANDT (2007)

A Figura 12 ilustra de forma esquemática a diferença entre uma curva Gaussiana de Hubbert simples de uma curva Gaussiana de Hubbert modificada por padrões. É possível observar que a curva A possui um padrão simétrico de comportamento, onde o lado direito da curva é o espelho do lado esquerdo, pois as taxas de inclinação possuem o mesmo padrão de comportamento ( $\sigma_{dec} = \sigma_{cresc}$ ). Na situação da curva B o padrão de simetria não se mantém, pois como proposto por BRANDT (2007) esse formato representaria melhor a forma dos dados observados ( $\sigma_{dec} \neq \sigma_{cresc}$ ).

KAUFMANN (1990); MORENEY & BERG (1999) e CAVALLO (2004) propuseram um modelo híbrido, onde utilizaram o modelo físico da curva de Hubbert inserido em um modelo econométrico para realizar suas estimativas da curva de produção de petróleo, considerando fatores econômicos como: oferta; demanda; preços e outras variáveis de significâncias. Tal forma de modelagem foi discutida no subcapítulo 2.3.2 Modelos Econométricos.

Todas essas variantes ao modelo Hubbertiano foram tentativas de melhor adequar o modelo aos dados observados. Contudo, elas se mostraram difíceis de ser implementadas. A curva simples de Hubbert costuma apresentar uma forma matemática relativamente simples de ser manipulada e tende a necessitar de poucas informações para a formação de suas previsões; é uma das formas mais utilizada pela maioria dos autores para estimações futuras para o pico de produção ou descobertas de petróleo. Entretanto suas críticas são fundamentadas e não podem ser ignoradas.

Já REHRL & FRIEDRICH (2006) aplicam distintas formas de modelar Hubbert para realizar previsões da produção mundial de petróleo com um modelo denominado *LOPEX* (*Long-term Oil Price and EXtraction*). Nessa modelagem os países produtores de petróleo são divididos entre países formadores de preços (i.e. países que fazem parte da Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP)) e países tomadores de preços (i.e. o resto do mundo). Segundo REHRL & FRIEDRICH (2006) o comportamento das curvas de produção dos países da OPEP acontecerá a partir da otimização intertemporal de sua produção, que encontrará o equilíbrio entre a oferta de todos os produtores em função da demanda (i.e. a propensão a pagar do mundo); tal modelo econômico estaria restrito a uma capacidade física de extração dada pela curva de Hubbert. Dessa forma há uma interdependência entre produção  $X(t)$ ; demanda  $D(t)$  e do caminho dos preços  $P(t)$ . A relação entre o preço do petróleo mundial e sua demanda é dada pela função de demanda com a elasticidade-preço constante, conforme a seguinte equação:

$$D(t) = d\_ref(t) [P(t) / P\_ref(t)]^\varepsilon \quad \text{Eq. 30}$$

Onde,  $d\_ref(t)$  é o cenário de referência da demanda;  $P\_ref(t)$  é o cenário de referência dos preços e  $\varepsilon$  é a elasticidade-preço no longo prazo. A Eq. 30 deve contabilizar respostas de demanda e substituições no setor, como: crescimento na demanda de energia e outros fatores econômicos que não sejam incorporados ao modelo *LOPEX*.

Assim, assumindo possíveis erros probabilísticos na curva da demanda  $D(t)$  e com a elasticidade-preço constante, o consumo mundial de petróleo ( $woc(t)$ ) é explicado pelo atual preço do petróleo e pelo consumo do ano anterior:

$$\ln woc(t) = c + \alpha \ln p(t) + \lambda \ln woc(t - 1) + u(t) \quad \text{Eq. 31}$$

Onde,  $c$  é uma constante;  $\alpha$  é a elasticidade preço de curto prazo;  $\lambda$  é o parâmetro de ajuste temporal e  $u(t)$  é a estimação de erro.

Dessa forma REHRL & FRIEDRICH (2006) concluem que a OPEP não se restringe a ciclos de Hubbert. Por possuir a maior parte das reservas mundiais de petróleo ela pode decidir simultaneamente o ótimo intertemporal de produção  $X(t)$  associado à evolução de preços  $P(t)$ . Portanto a função que irá definir seu nível de produção temporal será uma função objetivo dada pela maximização da soma dos valores presentes dos lucros:

$$\text{Max } \sum_{t,k} d(t) \{P(t)X_k(t) - C_k(X_k(t), R_k(t-1), t)\} \quad \text{Eq. 32}$$

Sujeito à:

$$R_k(t) = R_k(t-1) - X_k(t); \quad \text{Eq. 33}$$

$$X(t) = \sum_k X_k(t) = D(t) - \text{nop}(t) \quad \text{Eq. 34}$$

Onde,  $k$  é a evolução temporal de ciclos de produção;  $C_k$  são os custos em cada ciclo;  $R_k(t)$  são os recursos remanescentes da OPEP a cada ciclo e  $\text{nop}(t)$  a produção dos países não-OPEP (i.e resto do mundo).

Já para os países tomadores de preços (não-OPEP) a argumentação de REHRL & FRIEDRICH (2006) propõe que suas produções deverão seguir não um padrão físico-econômico como a curva de produção dos países da OPEP, mas sim uma série de curvas de Hubbert, denominadas de Multi-Ciclos ou Multi-Hubbert. Pois segundo os autores, países não-OPEP irão ofertar o máximo de recurso que os preços do petróleo lhes permitirem fazer, pois não possuem a capacidade de ditar preços como a dos países da OPEP. Então, suas produções dependeriam do que pudessem retirar do solo: tais produções seguiriam um formato conforme o modelo físico de Hubbert. O modelo proposto por REHRL & FRIEDRICH (2006) para países não-OPEP funcionaria conforme a equação 35:

$$\text{nop}(t) = \sum_k h_k(t) \quad \text{Eq. 35}$$

Sujeito à,

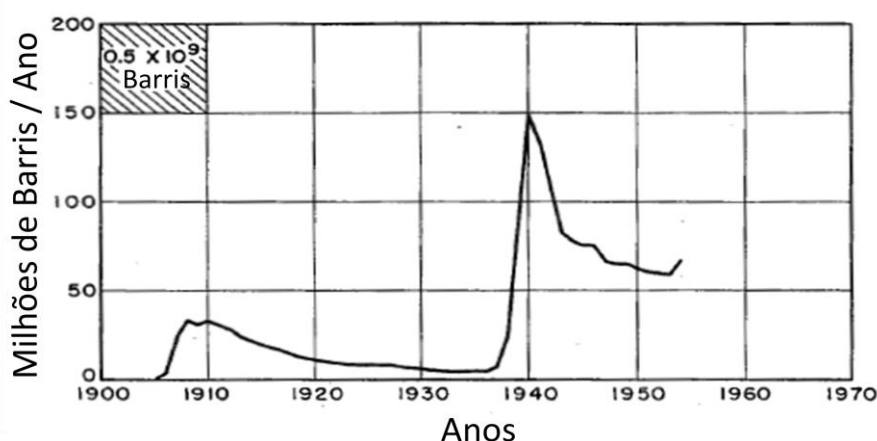
$$h_k = \{Q_{\infty,k} * b_k * \exp[-b_k(t-t_{0,k})]\} / \{1 + \exp[-b_k(t-t_{0,k})]\}^2 \quad \text{Eq. 36}$$

Onde,  $Q_{\infty,k}$  é a URR para o ciclo  $k$ ;  $t_{0,k}$  é o tempo em que ocorrerá o pico de produção para o ciclo  $k$  e  $b_k$  é a inclinação da curva do ciclo  $k$ . Esses três parâmetros

definem o formato de um ciclo Multi-Hubbert e  $nop(t)$  é o somatório de cada um desses ciclos para a produção de uma nação não-OPEP.

### 3.3. A descrição da curva Multi-Hubbert:

A curva Multi-Hubbert foi identificada pela primeira vez em HUBBERT (1956), que, ao observar o comportamento da curva oriunda dos dados registrados do campo de *Illinois*, Estados Unidos, notou que tal campo obteve dois picos de produção de petróleo, ao invés de um único pico. Para HUBBERT (1956) tal evento era um comportamento diferente dos demais, porém sem importância, pois esse fato era uma “exceção de afloramento ocasional<sup>43</sup>” - e dado efeito era geologicamente conhecido.



**Figura 13: Produção de petróleo do campo de *Illinois* entre os anos de 1905 a 1955.**

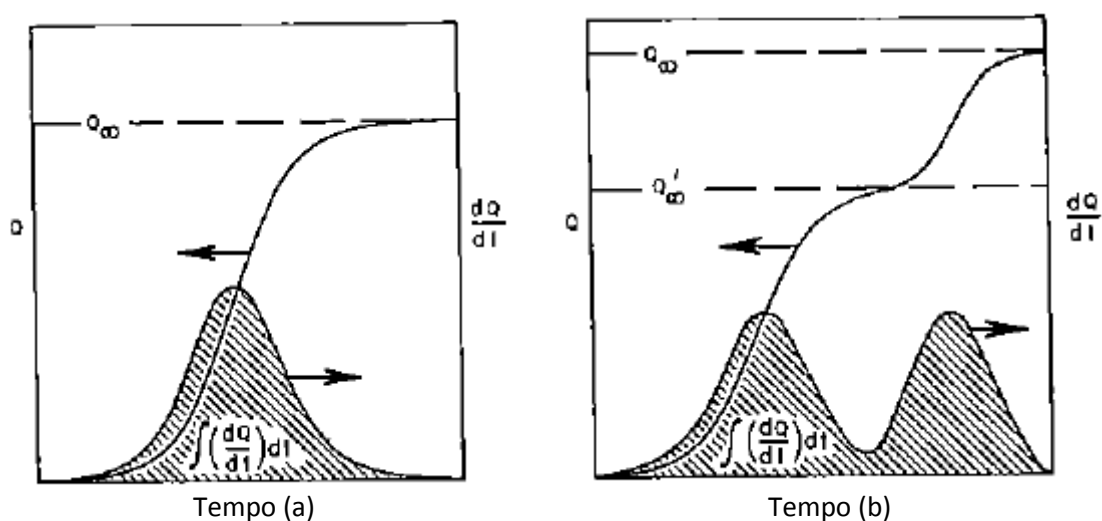
Fonte: HUBBERT (1956)

A Figura 13 é a ilustração dos dados observados do campo de *Illinois*, entre os anos de 1905 a 1955. Ela ilustra bem o efeito observado por HUBBERT (1956), onde após um primeiro pico de produção em 1910, um segundo pico ainda maior que o primeiro foi observado em 1940.

Em HUBBERT (1962) frente à comprovada existência de dois picos de produção no caso de *Illinois*, o autor propõe que o formato para dada situação se comportaria como Multi-Ciclos de produção, onde depois de formada uma primeira curva simples de produção tipo Hubbert, uma segunda curva aconteceria em sequência conferindo a forma com mais de um ciclo de produção. HUBBERT (1962) continuou a

<sup>43</sup> O termo usado em Hubbert (1956) foi “*Exception of occasional outcrops*”

afirmar que esse era um caso isolado e que as evidências obtidas naquela época revelavam que, para uma região mais abrangente, como o caso da produção norte-americana, o comportamento da produção seguiria uma curva simples ao invés de uma curva com dois picos. Entretanto, apesar de não acreditar que uma curva Multi-Ciclo pudesse explicar o comportamento da produção petrolífera de regiões maiores, como uma nação ou o mundo, HUBBERT (1962) apresentou a diferença entre uma curva simples e uma Multi-Ciclo representado pela Figura 14:



**Figura 14: Curvas de evolução da produção acumulada e da taxa de produção para o caso (a) de uma curva simples e para o caso (b) de uma curva Multi-Ciclo:**

Fonte: HUBBERT (1962)

A Figura 14 ilustra o comportamento das curvas de produção e das curvas de taxa da produção para os casos: (a) de um modelo simples de Hubbert e (b) de um modelo Multi-Ciclo de Hubbert. Na Figura 14 é possível notar que para o caso (a) a ilustração gráfica representa o modelo clássico da curva simples de Hubbert onde a taxa de produção (representada pela curva preenchida) inicialmente cresce devagar, vai aumentando com ganhos de escala até atingir um pico de produção (i.e. ponto de inflexão) e depois vai decaindo até atingir a exaustão das últimas reservas recuperáveis em  $Q_{\infty}$ . Já a produção acumulada (representada pela curva sem preenchimento) no caso (a) inicia crescendo pouco, aumenta com ganhos de escala até a metade da produção (i.e. ponto de inflexão), quando passa a obter ganhos decrescentes de escala até atingir a exaustão das últimas reservas recuperáveis ( $Q_{\infty}$ ).

O caso (b) expressa a interpretação de HUBBERT (1962) para um Multi-Ciclo, onde em um primeiro momento o comportamento da curva da taxa da produção seguirá a forma de crescimento e decrescimento similar ao do modelo simples, contudo ao final do primeiro ciclo ocorrerá a exaustão não das reservas finais, mas sim de as reservas de uma primeira etapa de descobertas ( $Q'_{\infty}$ ), a partir daí um novo ciclo de mesmo formato, porém com um novo montante final de reservas ( $Q_{\infty}$ ) será iniciado, obtendo-se assim dois diferentes picos de produção. A curva de produção acumulada para o caso de Multi-Ciclo também se inicia de forma bem similar ao caso simples, porém quando a mesma atinge seu primeiro estágio de exaustão ( $Q'_{\infty}$ ), um novo ciclo de produção começa acumulando novos níveis de produção ao ciclo anterior e um novo e prolongado nível de reservas finais ( $Q_{\infty}$ ) é produzido.

Portanto, pode-se observar pela Figura 14 que a curva de produção Multi-Ciclo ou Multi-Hubbert é a sobreposição entre duas curvas simples de Hubbert; logo, quando um primeiro ciclo acaba, um novo ciclo é iniciado, resultando em dois picos de taxas de produção e na ampliação do montante da produção acumulada final. Outro fato que pode ser observado no modelo Multi-Hubbert é que, para sua ocorrência, novos e relevantes volumes de reservas deverão ser incorporados após o primeiro pico de produção já ter acontecido, ou seja, novas reservas deverão ser formadas no local do ciclo anterior para que se forme um novo ciclo. Isso é possível devido aos conceitos variáveis de reservas, que permitem incorporar novas descobertas, por desenvolvimento tecnológico e/ou ganhos econômicos<sup>44</sup> com o passar do tempo, permitindo que novas formas de exploração e produção sejam promovidas e um atraso entre as descobertas seja gerado, causando um novo ciclo.

Apesar de HUBBERT (1956 e 1962) ter notado a existência de um Multi-Ciclo para um caso específico, foi LAHERRERE (1997) que constatou que o comportamento da produção petrolífera em regiões com menor número de bacias e/ou campos geralmente eram representadas por mais de um pico de produção. Dessa forma LAHERRERE (1997) propôs que o modelo para solucionar a maioria dos perfis observados por ele, deveria ser o modelo Multi-Hubbert, pois, além de possibilitar a solução para um único pico de produção, também solucionaria os demais cenários. Quando se assume apenas um ciclo de produção, o formato da curva Multi-Hubbert se

---

<sup>44</sup> Um exemplo que pode ser citado para a viabilização técnica e econômica na formação de um novo ciclo de produção é o pré-sal brasileiro, que será mais bem discutido no capítulo 4 desta dissertação.

igual a uma curva simples de Hubbert. Já quando a solução requerer mais de um ciclo de produção a solução se daria por diversas curvas de Hubbert somadas.

O modelo desenvolvido por LAHERRERE (1997) foi bem descrito por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012), que explicaram que o modelo Multi-Hubbert é a sobreposição de curvas simples de Hubbert que serão somadas a fim de se obter o montante final de produção. A representação equacional desenvolvida por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) é dada pela Eq. 37:

$$P = \sum_{i=1}^N (2P_{mi}) / \{1 + \cosh[b_i(t-t_{mi})]\} \quad \text{Eq. 37}$$

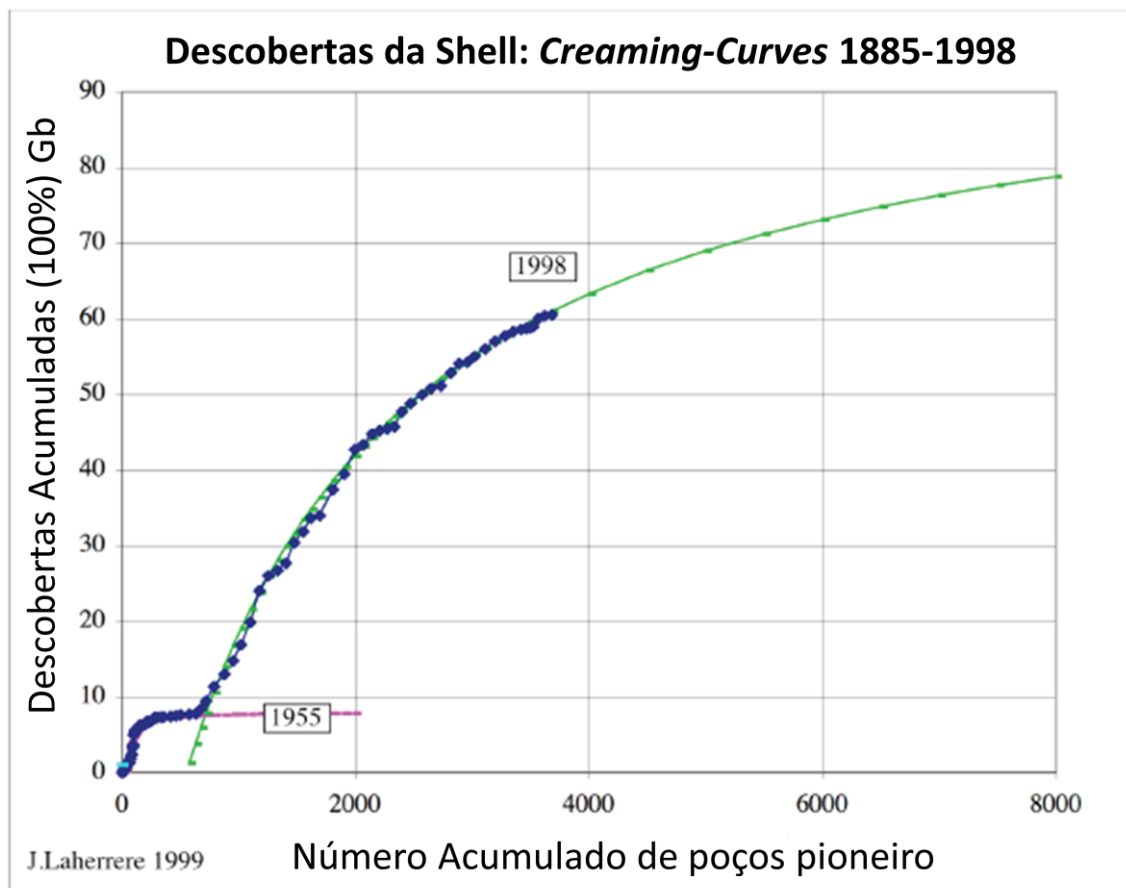
Sujeito à:

$$Q_{\infty i} = (4P_{mi} / b_i) \quad \text{Eq. 38}$$

Onde,  $N$  é o número de ciclos existentes;  $P_{mi}$  são os diferentes picos de produção que ocorreram para cada ciclo,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $Q_{\infty i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , são as Últimas Reservas Recuperáveis em cada ciclo;  $b_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , são as respectivas inclinações de cada ciclo e  $t_{mi}$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , são as datas correspondentes a cada pico de produção.

É possível observar que as Eq. 37 e Eq. 38 têm o mesmo comportamento que as Eq. 35 e Eq. 36 desenvolvidas por REHRL & FRIEDRICH (2006) e são a representação das curvas desenvolvidas por LAHERRERE (1997) e utilizadas pela maioria dos autores que fizeram suas expectativas de produção utilizando o formato Multi-Hubbert (LAHERRERE, 1997, 2001 e 2003; REHRL & FRIEDRICH, 2006; NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH, 2010a; PATZEK & CROFTE, 2010 e MAGGIO & CACCIOLA, 2010 e 2012). Outros formatos para este modelo foram desenvolvidos posteriormente a LAHERRERE (1997), geralmente buscando melhor adequação aos dados observados.

LAHERRERE (2009) buscou estimar as últimas reservas recuperáveis de óleo e gás natural em cada continente e no mundo, utilizando as chamadas *Creaming-Curves*. As *Creaming-Curves* foram desenvolvidas pela Shell nos anos 1980 para modelar as descobertas acumuladas versus o número acumulado de poços-pioneiro, usando o formato de hipérboles. As *Creaming-Curves* foram também capazes de identificar o aumento acentuado que ocorreu nas descobertas da Shell no ano de 1955. A Figura 15 ilustra o modelo desenvolvido pela Shell.



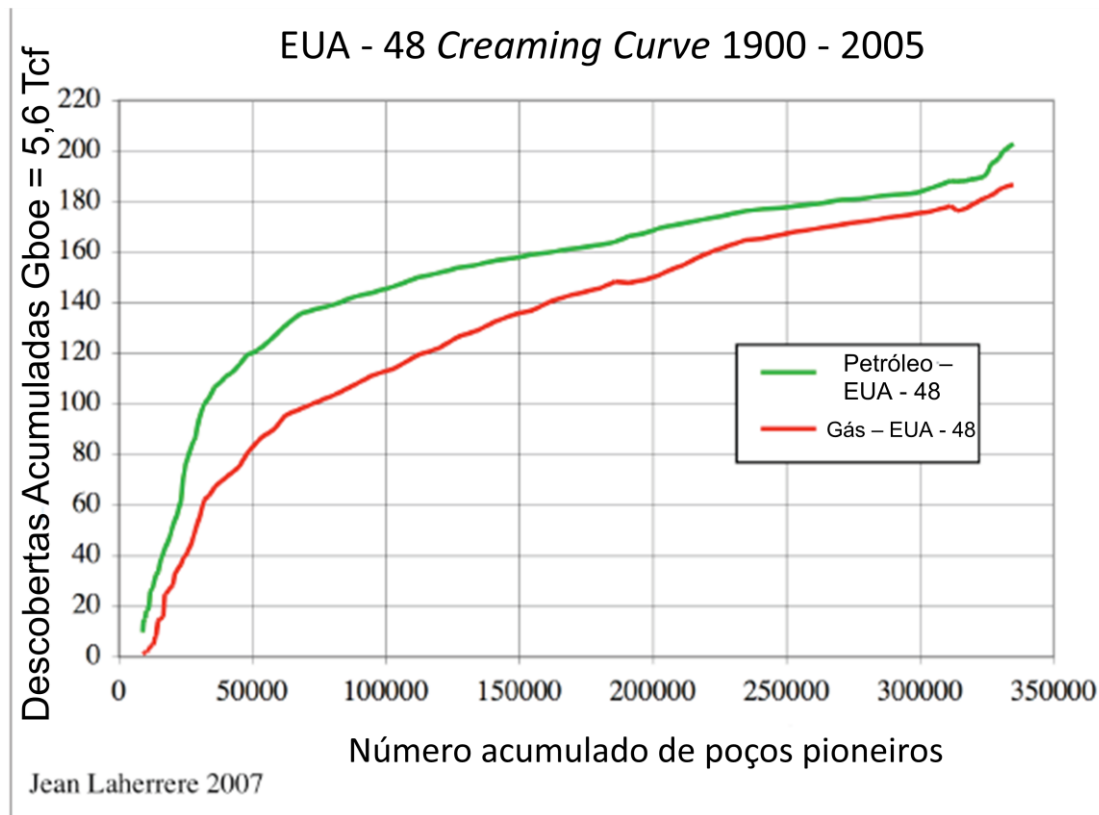
**Figura 15: Descobertas da Shell: *Creaming-Curves* entre os anos 1885-1998.**

Fonte: LAHERRERE (2009)

A Figura 15 ilustra as *Creaming-Curves* desenvolvidas pela Shell para representar os níveis de crescimento entre suas descobertas acumuladas versus o número acumulado de poços pioneiro, entre os anos de 1885 a 1998. Segundo LAHERRERE (2009) essa forma de representação é mais bem elaborada que a curva de descobertas acumuladas *versus* o tempo, pois elimina eventuais interrupções nas explorações da companhia, o que favorece a continuidade dos dados observados.

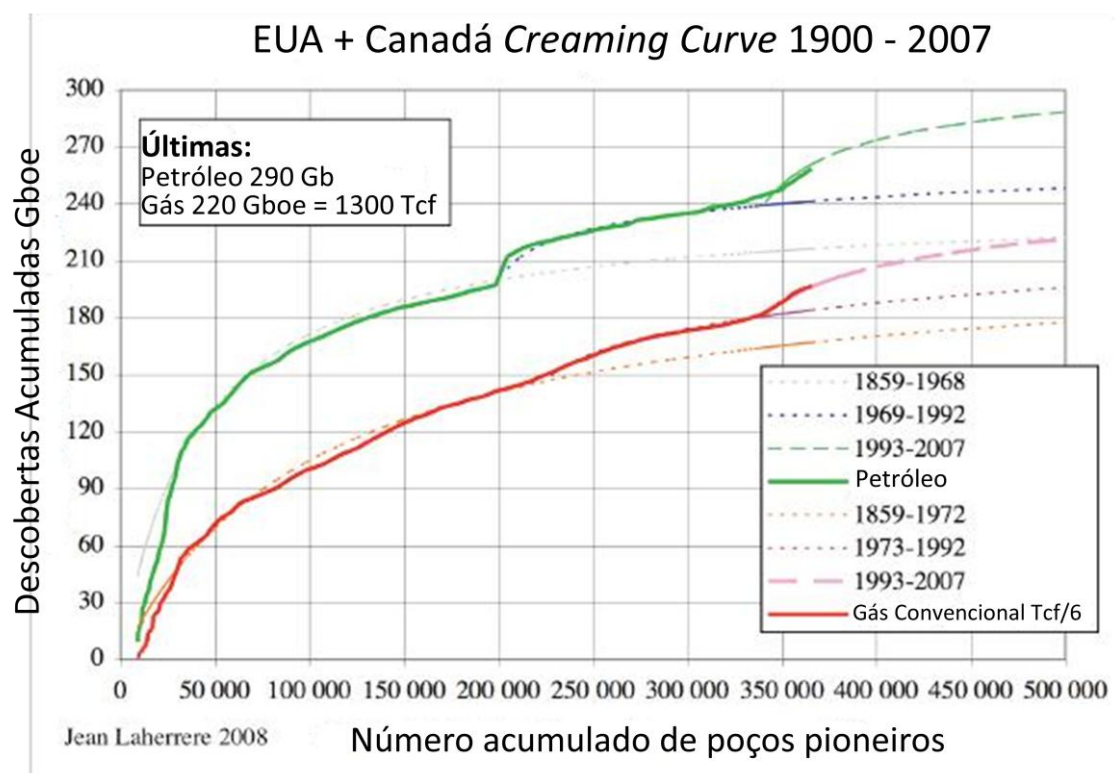
Para LAHERRERE (2009, 2010 e 2012) as *Creaming-Curves* são capazes de modelar com uma ou diversas hipérboles qualquer nível de descobertas ou produção sobre novos campos de exploração em regiões específicas, além da importante característica de serem capazes de identificar grandes saltos nas produções, como o caso da Shell no ano de 1955. Essas características revelam a capacidade de incorporar possíveis variações nos ciclos exploratórios do petróleo, o que o formato Multi-Hubbert desenvolvido em LAHERRERE (1997) se propôs a identificar. A Figura 17 representa a necessidade da utilização de múltiplas curvas a fim de representar a produção de duas

nações: Estados Unidos + Canadá; esta observação, em princípio, contradiz a suposição de Hubbert de que, para representar campos maiores, a curva de produção deveria se comportar conforme uma curva simples, Figura 16:



**Figura 16: *Creaming-Curve* dos 48 campos dos Estados Unidos (EUA – 48), entre os anos de 1900 a 2005 de petróleo e gás.**

Fonte: LAHERRERE (2009)



**Figura 17: *Creaming-Curves* dos Estados Unidos mais o Canadá, entre os anos 1900 a 2007 para petróleo e gás convencional.**

Fonte: LAHERRERE (2009)

Com a *Creaming-Curve* da Figura 16 é possível observar que o comportamento para os 48 campos norte-americanos acontece conforme HUBBERT (1956 e 1962) havia previsto, exceto pela parte final do gráfico que representa as descobertas em águas ultra-profundas dos estados americanos, iniciando um segundo ciclo. Já na Figura 17 é possível observar três ciclos nas descobertas de petróleo, a linha contínua verde representa a ilustração dos dados reais observados por LAHERRERE (2009), já as linhas tracejadas são as expectativas de curvas *Creaming* realizadas pelo autor, onde a cada salto de produção (i.e. novas descobertas) uma nova curva é criada, dessa forma novas expectativas na produção são criadas.

O interessante a ser observado nas Figura 16 e Figura 17 é que HUBBERT (1956 e 1962) não estava errado ao afirmar que o comportamento das curvas dos 48 campos norte-americanos deveria ser representado por uma curva simples, pois as observações existentes na época o levaram a concluir dessa forma. Mas para representações com dados mais recentes de curvas de produção ou descobertas, análises do comportamento de cada região estudada devem ser realizadas a fim de se descobrir

se a curva de uma região se comportará conforme uma curva simples de Hubbert ou se comportará como uma curva Multi-Ciclos.

As *Creaming-Curves* de LAHERRERE (2009) foram capazes de mostrar que, para determinadas situações, Multi-Ciclos representam melhor o formato de produção em uma região. Entretanto, para a construção de *Creaming-Curves* há a necessidade de um elevado número de dados sobre exploração, perfuração e produção de cada região estudada, o que pode ser um problema, pois estes dados costumam não ser facilmente adquiridos para maioria das regiões, além de grande parte deles normalmente não serem confiáveis (BENTLEY, MANNAN & WHEELER, 2007; OWEN, INDERWILDI & KING, 2010 e MENG & BENTLEY, 2008).

É dessa forma que LAHERRERE (2009) afirma que descobertas de campos bem conhecidos como dos Estados Unidos são facilmente modeláveis através das *Creaming-Curves*, pois possuem seus dados detalhados e com uma confiável transparência. Contudo, para modelagens de regiões com um baixo conhecimento técnico; problemas políticos; interesses diversos e/ou para a modelagem das reservas mundiais, o autor identificou que a utilização de *Creaming-Curves* resultam em modelagens pouco significativas, pois a pouca confiabilidade dos dados e a incompatibilidade de estratégias de produção entre países<sup>45</sup> resultaram em modelos pouco confiáveis e curvas que não representaram bem os dados observados.

Outra maneira de se obter resultados que se assemelham aos resultados desenvolvidos por Multi-Ciclos é o Modelo Modificado Multi-Hubbert, que foi desenvolvido e proposto por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012). O modelo utiliza o mesmo princípio do modelo Multi-Hubbert de LAHERRERE (1997), porém, ao observarem que alguns dados gerados por modelos clássicos, obtiveram diferenças sensíveis relativamente aos dados reais, MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) propuseram que um novo fator de alargamento da curva Multi-Hubbert ( $k$ ) fosse introduzido na equação gerando a seguinte forma:

$$P = \sum_{i=1}^N (2P_{mi}) / \{1 + k_i * \cosh[b_i(t - t_{mi})]\} \quad \text{Eq. 39}$$

Sujeito a:

---

<sup>45</sup> LAHERRERE (2009) cita como problema de estimar a produção mundial a incompatibilidade de estratégias, como para os casos: Norte Americano, onde vigora a regra da captura, possuindo mais de 20.000 proprietários de poços de petróleo que trabalham de forma coordenada para otimizar suas explorações; versus a estratégia da Arábia Saudita, onde apenas uma empresa governamental possui todos os direitos de exploração e suas estratégias de exploração dependem de estratégias da OPEP.

$$Q_{\infty i} = (4P_{mi}/b_i) * [\ln(1 + \sqrt{1 - k_i^2}) - \ln(k_i)] / \sqrt{1 - k_i^2} \quad \text{Eq. 40}$$

Esta equação se difere da equação Multi-Hubbert tradicional pelo fator de alargamento  $k_i$  ( $0 < k_i \leq 1$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Com a introdução do fator  $k_i$  as datas ( $t_{mi}$ ) e os valores ( $P_{mi}$ ) dos picos de produção são alargados; os valores dos picos se comportam sob o seguinte aspecto:

$$P_{maxi} = 2P_{mi} / (1 + k_i) \quad \text{Eq. 41}$$

Onde,  $P_{maxi}$  serão os novos picos de produção para cada pico de produção do modelo Multi-Hubbert tradicional. É importante notar que todas as equações desenvolvidas por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) se igualam às equações tradicionais do Hubbert típico, se  $k_i$  tender a 1

O modelo do MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) pode ser uma solução elegante e prática para solucionar a igualdade entre os pesos dos efeitos de depleção e de informação na solução do problema clássico de Hubbert, tal qual proposta em SZKLO ET AL (2007). Nada indica que os efeitos teriam o mesmo peso na função, mas é difícil depreender quanto cada efeito seria mais importante para cada região. Logo, a solução do fator  $k$  parece indicar algo neste sentido, como uma solução prática causada pelo ajuste aos dados reais das curvas de produção e descoberta.

Como pode ser observado pela Eq. 39, o modelo Multi-Hubbert modificado proposto por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) necessita de algumas poucas variáveis exógenas para ser modelado ( $P_{mi}$ ,  $k_i$ ,  $N$ ,  $b_i$  e  $t_{mi}$ ), apesar de algumas dessas variáveis necessitarem de uma extensa tabela de dados para serem encontradas. Ainda assim o modelo Multi-Hubbert modificado necessita de muito menos dados para ser modelado do que as *Creaming-Curves*. A rigor, o modelo de MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) também pode ser tratado como um modelo híbrido *top-down*, em que a modelagem física clássica de Hubbert é ajustada por um fator  $k$ , cujo valor é obtido através da minimização do desvio quadrado entre a curva estimada e a curva real de descoberta (produção) de petróleo.

## **4 – Aplicação de um Modelo Multi-Hubbert modificado à Produção Brasileira de Petróleo**

### **4.1. Aspectos Metodológicos**

A metodologia aplicada nessa seção deriva do modelo Multi-Hubbert modificado, que foi desenvolvido por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012). A equação básica utilizada neste estudo é a Eq. 39. Para a simulação, foi utilizada a plataforma Microsoft Excel, inclusive para a minimização de desvios quadrados, conforme este capítulo detalhará.

Como descrito na seção anterior o Hubbert multi-ciclo foi a metodologia sugerida por LAHERRERE (1997) para descrever o problema de defasagem temporal entre as descobertas e produções de petróleo. De fato, o multi-ciclo procura identificar os diferentes ciclos observados para uma mesma região e reconhece cada um desses ciclos como um ciclo de Hubbert simples. Cada ciclo terá seu próprio montante de últimas reservas recuperáveis (URR) e, assim, sua própria estimativa do pico de produção, bem como a data correspondente de tal pico. Dessa forma, uma curva de distribuição da produção é gerada de forma independente para cada ciclo em formato de sino, que, quando somadas, formam o multi-ciclo completo.

MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) introduziram em sua proposta de modelagem hubbertiana modificada o parâmetro  $k$ , de forma a ajustar melhor os ciclos estimados aos dados observados. Essa variável também pode ser interpretada como um parâmetro que diferencia os níveis de informação e depleção para cada campo. De fato, nada indica que tais efeitos devem ter o mesmo peso para campos específicos, como a as soluções clássicas para o modelo de Hubbert sugerem. Por fim o parâmetro  $k$  faz com que seja necessário realizar neste estudo estimativas para tal parâmetro a partir da minimização dos desvios quadrados, - fato este que excede o puro conceito físico proposto por HUBBERT, criando uma espécie de hibridização do modelo clássico (1956 e 1962)

A estimativa do parâmetro  $k$  é feita a partir da minimização do quadrado dos desvios da curva estimada relativamente à curva observada de produção de petróleo,

para cada ciclo de Hubbert proposto. Logo, com os erros/desvios calculados para cada ano é calculado o quadrado dos mesmos para que assim esses resultados sejam somados. Por fim o solver do Excel é utilizado para realizar a minimização da função objetivo, que são os erros percentuais gerados a partir das curvas multi-Hubbert inicialmente geradas, em função do parâmetro  $k$ .

Utilizaram-se dados a partir de 1954 compreendendo os dados de exploração no Brasil a partir da criação da Petrobras. Foi observado que os montantes das reservas brasileiras vêm aumentando a taxas crescentes desde o início da série. Com efeito, observa-se que para certos períodos houve grandes saltos da produção. Observando-se tais incorporações de reservas de petróleo, conforme Laherrere (2009) sugeriu, é possível identificar no Brasil diferentes etapas ou degraus de ciclos multi-Hubbert, os quais se apresentam da seguinte forma: 1. *Onshore*; 2. Águas rasas <400m *Offshore* e 3. Águas profundas >400m *Offshore*.

Neste capítulo, à guisa de exercício prático, mas sem finalidade de projeção, também será considerada, em uma seção à parte, um quarto ciclo: o ciclo do pré-sal para águas ultraprofundas *offshore*, sobre o qual ainda há poucos dados históricos observados, impedindo o ajuste de mínimos quadrados de uma curva do tipo Hubbert a partir de dados históricos. Porém, na medida em que já existem previsões de uma importante incorporação de reservas e produção ao cenário brasileiro, optou-se por realizar tal exercício.

Como serão considerados multi-ciclos, para cada ciclo será considerado um montante de últimas reservas recuperáveis (URR) específico. Uma importante característica é que estes ciclos se superpõem no decorrer dos anos devido ao próprio conceito de reserva, onde reclassificações são feitas dinamicamente, para cada um dos ciclos. Dessa forma descobertas e explorações nos campos *onshore*, *offshore* <400m e *offshore* >400m continuam existindo independentes uma das demais. Porém, a assunção deste estudo é de que as reservas remanescentes dos ciclos *onshores* e *offshore* <400m serão consideradas como reservas remanescentes do ciclo *offshore* >400. Tal assunção teve fundamental importância para os cálculos da modelagem multi-Hubbert modificado, devido a disponibilidade dos dados adquiridos para a produção brasileira de petróleo.

O primeiro ciclo é um ciclo fundamentalmente terrestre (on-shore). Para este ciclo suas reservas finais são consideradas como a soma das produções anuais entre os anos de 1954 a 1990, já que por suposto suas reservas remanescentes são tidas como esgotadas.

O segundo ciclo considerado é um ciclo fundamentalmente de águas rasas (<400m; *offshore*). Para esse ciclo a mesma consideração de reservas remanescentes é assumida do ciclo *onshore*, conferindo a sua URR apenas a produção acumulada respectiva ao período dos anos de 1974 a 1999<sup>46</sup>.

Já o terceiro ciclo é o das águas profundas (>400m; *offshore*). Para esse ciclo as reservas consideradas são a soma da produção acumulada de 1986 até 2012 e um acréscimo das URR, que ainda não foram exploradas. Dessa forma a URR considerada no terceiro ciclo é igual à soma da produção acumulada do período indicado mais os níveis alternativos de probabilidades das reservas provadas, prováveis e possíveis (1P, 2P e 3P),<sup>47</sup> que serão utilizadas a fim de se realizar diferentes cenários para cada uma dessas probabilidades.

O quarto e último ciclo considerado será o ciclo associado aos recursos do pré-sal (águas ultraprofundas; *offshore*). Neste caso, a análise é realizada apenas à guisa de exercício prático, sendo apresentada em uma seção à parte, na medida em que não existem ainda dados de produção observados no pré-sal brasileiro que permitam o ajuste de mínimos quadrados de curvas de produção. Neste caso, será tão-somente proposto um exercício a fim de estimar possíveis picos de produção brasileira de petróleo considerando diferentes possibilidades de reservas para o pré-sal. Para a realização desse exercício será considerado somente o nível de probabilidade 2P para as reservas do terceiro ciclo e três diferentes montantes de reservas serão testados para o pré-sal.

A consideração de um exercício para o pré-sal, ao contrário do que é feito para os outros 3 ciclos identificados, se deve ao fato de os valores utilizados para o pré-sal

---

<sup>46</sup> A separação entre os anos de interseção dessa etapa com as demais também foi baseada em dados históricos de produção.

<sup>47</sup> As probabilidades citadas como: 1P, 2P e 3P seguem os dados apresentados pelo relatório da USGS (2000) e são respectivamente as probabilidades de 95%; 50% e 5% de o valor apresentado ser a real representação das reservas brasileiras de petróleo. Tais conceitos de reservas foram apresentados na seção 2.1 Conceitos: recursos e reservas.

serem ainda especulativos – isto é, existem poucos estudos sobre tais reservas e é insuficiente a base de dados da produção histórica da curva de exploração do pré-sal.

## 4.2. Base de Dados para Simulação de Cenários

Como exposto no Capítulo 3, a utilização da curva de Hubbert para a previsão da produção brasileira de petróleo depende fundamentalmente das variáveis exógenas  $Q_{\infty}$  e  $b$  (Últimas Reservas Recuperáveis e tempo de meia vida da exploração da região estudada, respectivamente). Por meio dessas se é capaz de calcular todas as outras variáveis necessárias ao modelo  $P_m$ ;  $c$ ;  $t_m$ , conforme mostram as Eq's. 42, 43 e 44.

$$P_m = Q_{\infty} / (0.8 * c) \quad \text{Eq. 42}$$

$$c = 5/b \quad \text{Eq. 43}$$

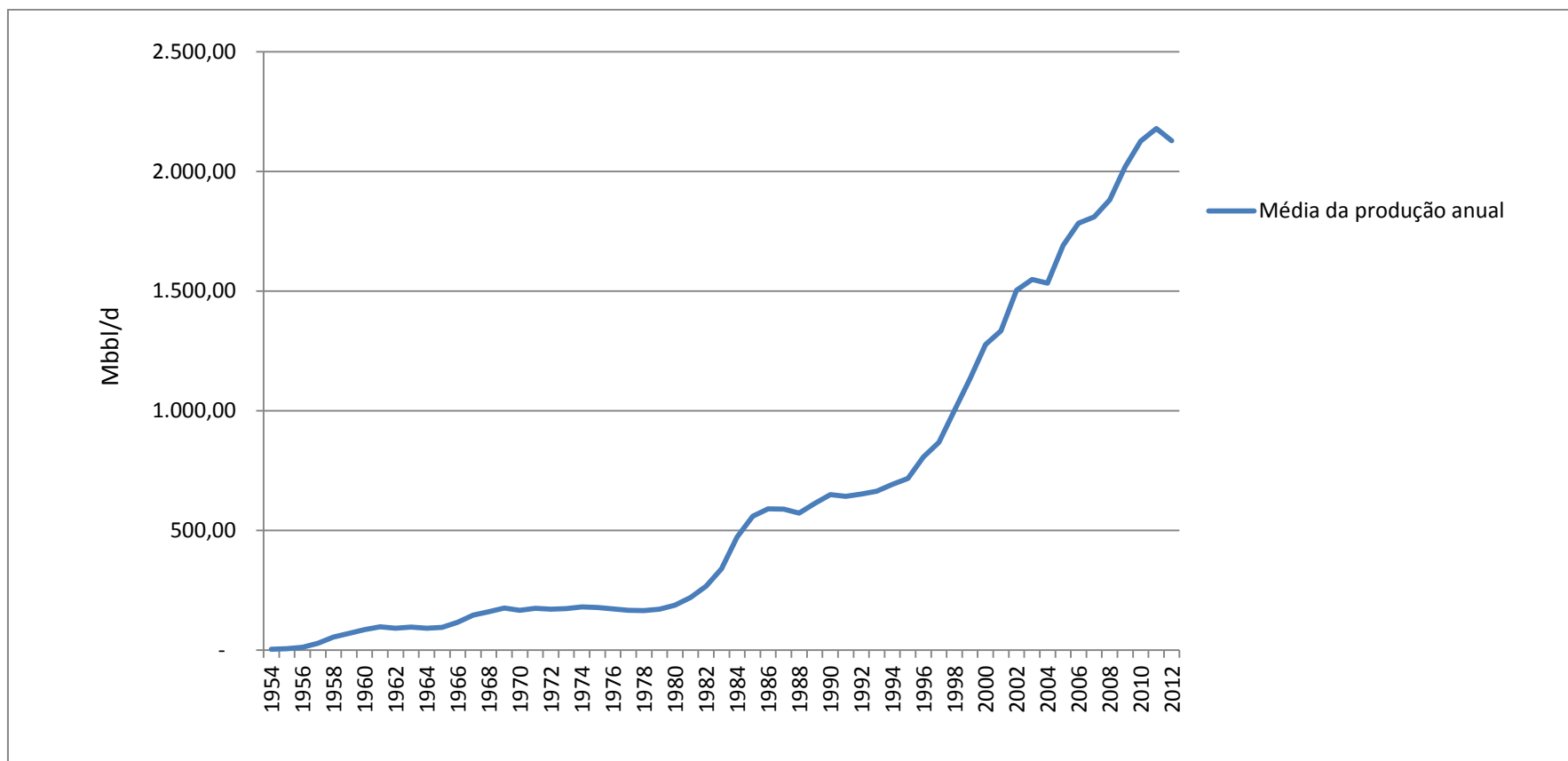
$$P = 2 * P_m / (1 + \cosh(b(t - t_m))) \quad \text{Eq. 44}$$

$Q_{\infty}$  e  $b$  são características físicas e específicas de cada campo de exploração. A base de dados tem grande influência nos resultados gerados para previsões da produção de petróleo e como o modelo de Hubbert permite a utilização de diversos cenários com diferentes níveis de probabilidade, é provável que este modelo responda melhor a campos com menor confiabilidade dos dados como o Brasil. A necessidade de dados detalhados para a estimação foi um fator determinante para o não emprego de determinadas metodologias neste estudo, como *Bottom-up* e sistemas de simulação (vide Capítulo 2). De fato, BENTLEY ET AL (2007); MENG AND BENTLEY (2008) e OWENN, INDERWILDI & KING (2010) enfatizaram que o problema central nas previsões de produção de petróleo se encontra na definição da base de dados utilizada para as estimações.

Neste estudo, os dados pesquisados para as estimações referem-se à produção histórica do Brasil entre as datas de 1954 a 2012. Obteve-se a produção média anual em mil barris por dia, conforme detalhado no Anexo 1. Os dados foram compilados a partir de diversos documentos como: BP (2012); Petrobras (2003 e 2012); ANP (2012) e

DENILSON FERREIRA (2005). Frente às diferentes fontes de dados da produção brasileira, foi necessário comparar os mesmos para que se determinassem aqueles que melhor correspondessem aos demais. Dessa forma decidiu-se que a base fundamental dos dados históricos (1964 a 1999) seria BP (2012), devido serem os dados mais completos de petróleo cru obtidos. Os mesmos foram completados pelos dados iniciais fornecidos pela Petrobras (1954 a 1964), que apesar de possuir dados que se referem à produção do óleo cru somados a produção de GNL (Gás Natural Liquefeito), na data referente a produção de GNL era desprezível. E por fim os dados foram completados pela ANP (2000 a 2012), dado que os dados da BP começam a descolar dos dados da ANP em 2005 foi optado utilizar essa fonte para os dados finais.

Para uma melhor ilustração dos dados mencionados é apresentada a curva da produção brasileira de petróleo utilizada para embasar os cálculos e ajustar as curvas estimadas à produção de petróleo nacional observada. A Figura 18 apresenta a evolução temporal da média diária de produção anual de petróleo no Brasil entre 1954 a 2012.



**Figura 18 Produção (milhares de barris por dia) - média anual do Brasil**

<sup>48</sup> A terminologia Mbbl/d significa Mil Barris por dia, assim como bbl (barris) e MMbbl (milhões de barris).

Neste caso, percebe-se a tendência de a produção seguir três diferentes ciclos produtivos. A rigor o primeiro ciclo se inicia em 1954 com produção fundamentalmente terrestre, que mantém sua predominância até final da década de 1970; em 1968 começam as explorações de um segundo ciclo, águas rasas, que ganham relevância produtiva no meio da década de 1980 e proporcionam um salto da produção brasileira no início da década de oitenta; e, por fim, em 1987 ocorre a predominância do terceiro ciclo identificado em águas profundas, que ganha relevância na produção em 1994 proporcionando mais uma salto nas produções e é o ciclo que predomina no país até 2012.

Entretanto, como indicado por SZKLO ET AL (2007), essa não deverá ser as reservas efetivamente observadas para o Brasil, pois o país ainda tem muitas bacias sedimentares não exploradas (SZKLO ET AL, 2007). Este fato é revelado pelo indicador de intensidade de exploração relativamente baixo, ao se considerar todo o território nacional. Este indicador consiste na razão existente entre as áreas sedimentares e o número de poços perfurados (BACOCOLI E CUÑIA FILHO, 2004). Ele pode ser utilizado como uma ferramenta para se analisar a maturidade de exploração de áreas produtoras de petróleo. Segundo BACOCOLI E CUÑIA FILHO (2004) os indicadores de intensidade de exploração no Brasil variavam entre 10 km<sup>2</sup>/ ExpW (quilômetros quadrados por poço explorado), no Recôncavo Baiano a 177.700 km<sup>2</sup>/ ExpW na Bacia Pareceris-Alto Xingu em 2004. Para 2012 pode-se introduzir a camada do pré-sal, que, de acordo com o TCU (2012), consiste em uma área total estimada de 149.000 km<sup>2</sup> com 27 poços perfurados sendo seu indicador de intensidade de exploração em torno dos 5.500 km<sup>2</sup>/ ExpW. Essas áreas indicadas, mesmo nos níveis mais baixos do indicador como no caso do Recôncavo Baiano, são consideradas muito pouco exploradas quando comparadas às regiões de bacias sedimentares norte-americanas, que possuem indicadores muito baixos de intensidade de exploração. Este fato indica um nível de exploração muito baixo no território brasileiro, o que denota a falta de conhecimento do real potencial de adição por descoberta às reservas nacionais.

Assim, verificados os indicadores de intensidade de exploração no Brasil e considerando as argumentações de BENTLEY ET AL (2007); MENG AND BENTLEY (2008) e OWENN, INDERWILDI & KING (2010), são propostas por este estudo duas outras probabilidades de URR em águas profundas >400m *offshore*. Para embasamento das estimações com diferentes probabilidades será utilizado o *United States Geological*

*Survey* (USGS, 2000), que no ano de 2000 calculou as reservas 1P; 2P e 3P para bacias sedimentares *offshore* brasileiras.

Dessa forma para as estimações de reservas provadas 1P foram utilizados os dados *BP* (2012) por permitirem uma maior correspondência com os dados reais observados das atuais reservas brasileiras, com um montante final de 29,1 bilhões de barris de petróleo (Gbbl). Para as reservas prováveis 2P e possíveis 3P serão utilizados os dados correspondentes ao USGS (2000), correspondendo a: 42,234 Gbbl e 100,848 Gbbl respectivamente. Como há uma defasagem temporal entre as estimativas do USGS (2000) e o ano base deste estudo, foram deduzidos dos totais as quantidades já produzidas de petróleo no Brasil, entre 2000 a 2012, que totalizam 8,327 Gbbl e também foi adicionado a produção total brasileira de 1954 até 2000 de 13,18 Gbbl. Assim, os URRs correspondentes a 2P e 3P da produção brasileira de petróleo são 47,75 e 106,42 Gbbl, respectivamente.

Por fim para o pré-sal foram consideradas reservas estimadas por diferentes fontes: DALLA COSTA & SOUZA-SANTOS (2009); FISHMAN (2010); WOOD (2010), MAUGERI (2012) e USGS (2000), onde as estimativas de reservas variam entre 30 a 100 bilhões de barris de petróleo. Portanto serão considerados três cenários possíveis para reservas do pré-sal: 30 Gbbl, que consiste no nível mínimo de reservas mencionados em DALLA COSTA & SOUZA-SANTOS (2009) DENMARK (2009) e WOOD (2010); 50 Gbbl, que consiste em uma aproximação do recurso adicionável, estimado como médio para o *post-salt* no USGS (2000); e 100 bilhões de barris de petróleo, que consiste no nível máximo de reservas mencionados FISHMAN (2010); WOOD (2010), MAUGERI (2012) e DENMARK (2009). É importante ressaltar que tais resultados não possuem qualquer fator probabilístico. Note-se aqui que se trata de estimativas muito menos rigorosas de adição de reservas no pré-sal do que o que foi adotado nos demais ciclos produtivos.

Os cenários multi-Hubbert para o pré-sal são estimados considerando o terceiro ciclo com o cenário de reservas 2P para águas profundas >400m *offshore* do USGS (2000). A justificativa para a utilização do cenário 2P é motivada por duas razões: a primeira é devido ao fato de o Brasil apresentar indicadores muito elevados de intensidade de exploração; assim, SZKLO ET AL (2007) indicam que a utilização apenas das reservas provadas para as estimações da produção seria demasiadamente conservadora em detrimento de um cenário mais indicado; a segunda refere-se ao

argumento de BENTLEY ET AL (2007), segundo o qual as reservas 2P, por possuírem níveis de reclassificação de reservas menores que as demais, possuem maior estabilidade para estimativas de URR.

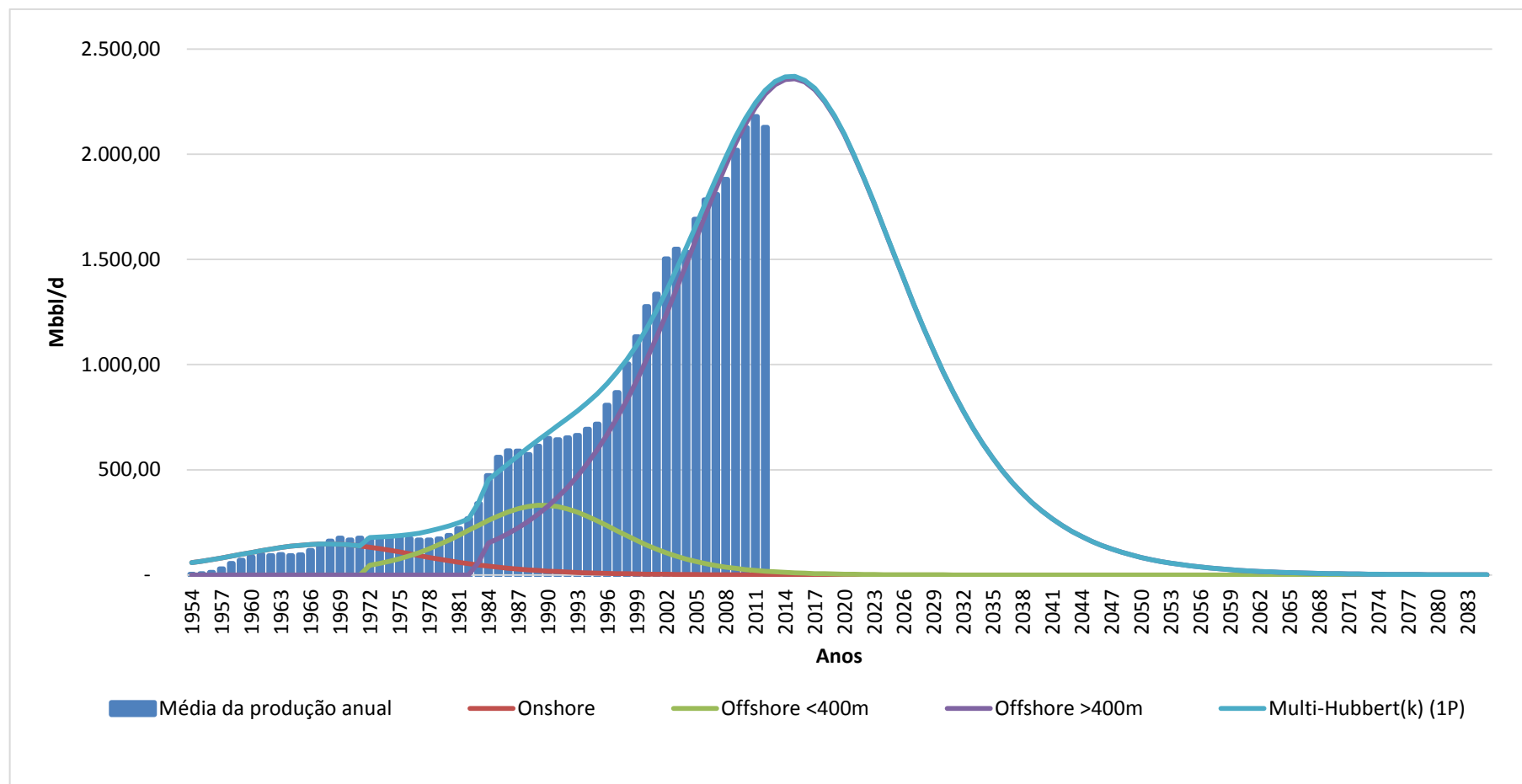
### 4.3. Resultados de cenários para os ciclos *onshore* e pós-sal

Conforme antes indicado, os resultados correspondem a cenários da produção de petróleo brasileiro desde 1954 até o possível esgotamento das reservas. Esta seção apresenta como principais resultados os gráficos que se referem às diferentes possibilidades de estimação da produção *onshore* e do pós-sal. Portanto, compreendem-se as reservas: *onshore*, águas rasas *offshore* <400m e águas profundas *offshore* >400m.

Como antes explicitado, são estabelecidas três diferentes estimativas de últimas reservas recuperáveis (URR) para as águas profundas *offshore* >400m, que incluem reservas provadas (1P); reservas prováveis (2P) e reservas possíveis (3P). Também são obtidos, conforme a modelagem modificada de Hubbert e de mínimos quadrados, os seguintes resultados: picos de produção  $P_m$ ; momentos de ocorrências dos picos de produção  $T_m$ ; parâmetros  $c$  da curva típica de Hubbert e parâmetros  $k$  das curvas modificadas de Hubbert, os dois últimos estimados pela minimização dos desvios quadrados de cada um dos ciclos e das estimações.

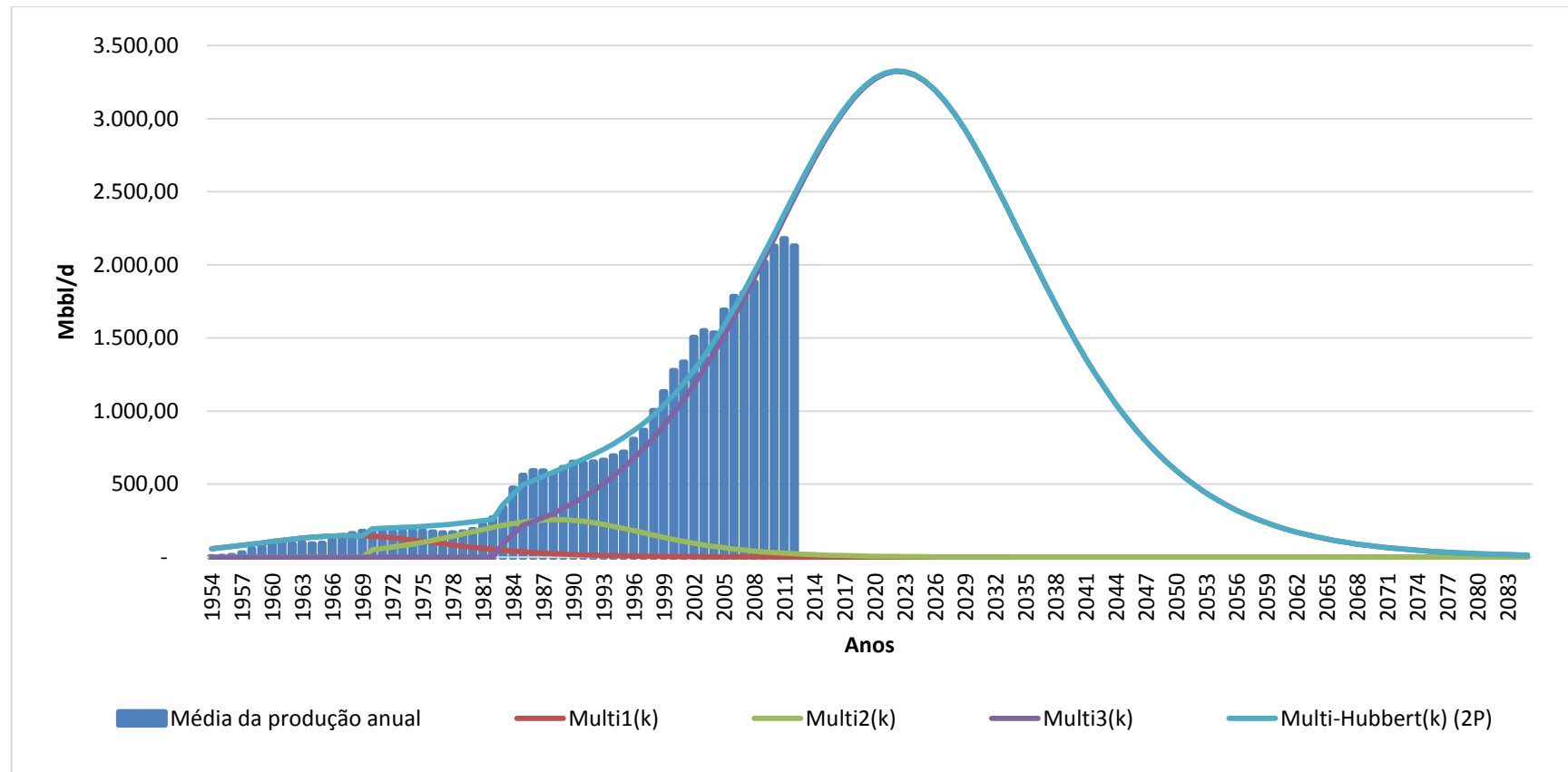
O primeiro cenário proposto para as estimativas da produção brasileira de petróleo utiliza reservas provadas. Trata-se de em um cenário conservador, porquanto apenas as reservas 1P do ano de 2011 disponibilizadas pela BP (BP, 2012) são, nele, consideradas. Tal assunção leva a um URR de 29,10 bilhões de barris de petróleo. Esse cenário é um importante indicador da produção futura brasileira, pois supondo a não inclusão de qualquer montante às reservas, essa estimativa seria um possível formato da curva de produção do país até o esgotamento de suas reservas de óleo bruto. Porém, como discutido anteriormente, os conceitos de reservas são revistos dinamicamente e, para o Brasil, a tendência é que novos montantes de reserva sejam adicionados em larga escala, no curto prazo. Dessa forma os resultados presentes nessa estimativa não deverão ser os mais prováveis de serem efetivamente observados no futuro, mas são importantes para se testar o comportamento da curva de produção supondo um mínimo

de reservas esperado. A Figura 19 mostra o formato da produção brasileira para este nível de reserva, a partir da modelagem multi-hubbert modificada.



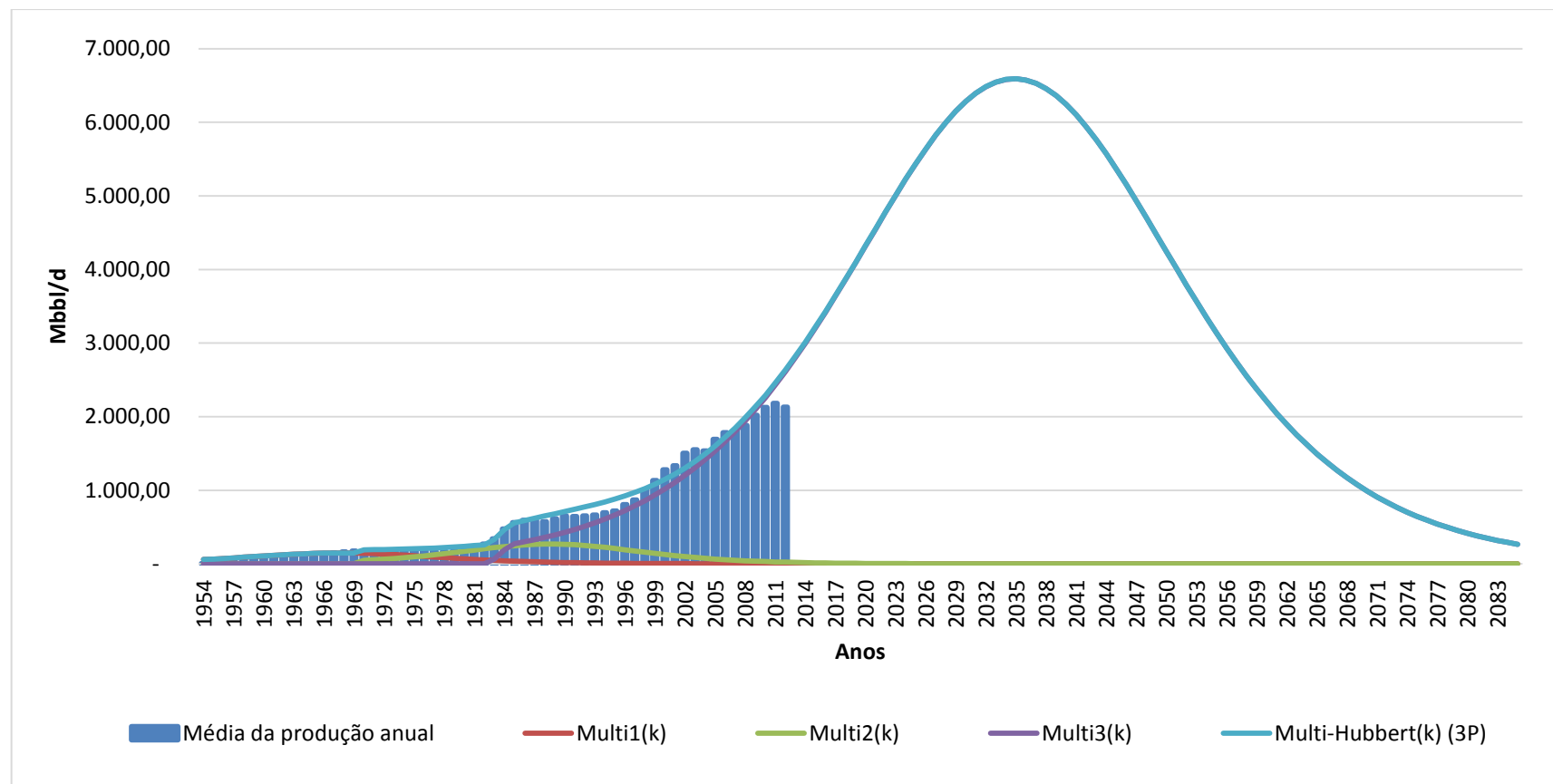
**Figura 19: Curva multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR total de 29,10 bilhões de barris de petróleo (exceto recursos do pré-sal)**

O segundo cenário considerado será o das reservas prováveis (2P). Para essa estimativa foi considerado o relatório do USGS (2000), para uma probabilidade de 50% de as reservas nacionais terem pelo menos o valor indicado. Assim foi considerado um URR de 47,75 bilhões de barris. Segundo SZKLO ET AL (2007) e BENTLEY ET AL (2007), este cenário é considerado indicado em termos metodológicos como a melhor estimativa para a produção das reservas do pós-sal, devido à falta de informação sobre as reservas brasileiras. A Figura 20 mostra o formato da produção brasileira para este nível de reserva, a partir da modelagem multi-hubbert modificada.



**Figura 20: Curva multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 47,75 bilhões de barris de petróleo (exceto recursos do pré-sal)**

O terceiro e último cenário considerado foi o das reservas possíveis (3P). Essa estimativa também foi embasada nos dados fornecidos pelo USGS (2000), para uma probabilidade de 5% de o URR nacional ser de 106,42 bilhões de barris. A importância dessa estimativa está em indicar um cenário menos provável, porém com um valor próximo ao máximo de produção que o Brasil poderia sustentar para o pós-sal. A Figura 21 ilustra o formato da produção brasileira para este nível de reserva, a partir da modelagem multi-Hubbert modificada.



**Figura 21: Curva multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 106,42 bilhões de barris de petróleo (exceto recursos do pré-sal)**

As Figuras 19, 20 e 21 mostram diferentes cenários para a produção brasileira supondo diferentes níveis de reservas na região do pós-sal com diferentes níveis de probabilidades de ocorrência. As curvas Multi-Hubbert(k) consistem nas estimativas de multi-Hubbert modificados. Como pode ser observado nestas figuras, as estimativas ocorreram supondo três ciclos de Hubbert, idealizados a partir da identificação dos ciclos pela curva observada da produção brasileira. Como a curva multi-Hubbert consiste na soma de curvas Hubbert simples, são as curvas de cada ciclo que regem o comportamento da multi. Logo, o entendimento das mesmas é de fundamental importância para o entendimento geral.

Nas três figuras foi identificado como um primeiro ciclo a exploração do petróleo terrestre brasileiro (ciclo *onshore*). A estimação desse ciclo está representada pela curva Multi1(k). Para essas reservas foi adotado o fator  $k$  referente às estimações de um primeiro ciclo citadas por MAGGIO e CACCIOLA (2009 e 2012) como  $k=1$ . Portanto as estimações dos ciclos *onshore* se caracterizaram por possuírem sempre um mesmo formato, o que gerou os mesmos valores para suas variáveis endógenas em todos os níveis de produção. Os resultados foram: picos de produção  $Pm = 147,37$  mil barris por dia (Mbbl/d); com os anos de pico  $Tm = 1968$  e tempos de meia vida  $c = 45$  anos para todos os níveis de probabilidades 1P; 2P; 3P.

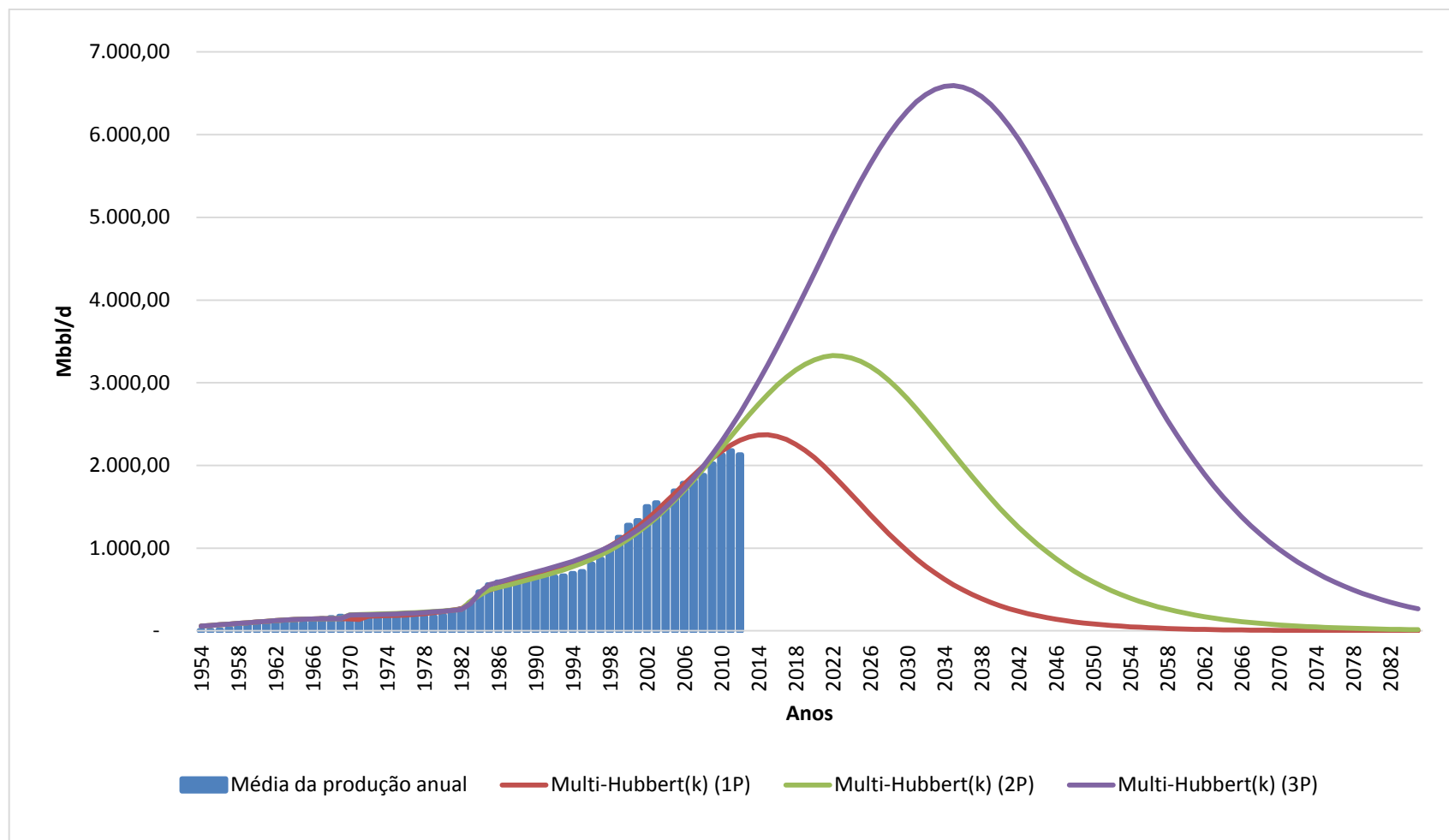
Para o segundo ciclo identificado, explorações em águas rasas (*offshore* <400m), a representação gráfica está nas curvas Multi-2(k) e suas estimações possuem a mesma característica de URR fixos do primeiro. Porém o terceiro ciclo possui grande influência sobre este ciclo, o que resulta em estimações com diferentes níveis para as variáveis, onde: o pico de produção  $Pm = 303,66; 248,72$  e  $258,89$  Mbbl/d; os anos de pico ocorrem em  $Tm = 1989; 1988$  e  $1989$ , com tempos de meia vida estimados em  $c = 35; 43$  e  $41$  anos e fator de ajuste  $k = 0,83; 0,94; 0,93$  respectivos aos níveis de probabilidade 1P; 2P e 3P.

Assim, como se nota, adotou-se em todos os cenários para o multi1 (k) (*onshore*) parâmetros  $k$  iguais a unidade e, portanto, tais ciclos são relativamente bem representados por curvas de Hubbert simples. Já o segundo ciclo observou-se um maior distanciamento de  $k$  a unidade. Tal resultado pode ter ocorrido devido a política de produção antecipada do Brasil naquela época, na qual a frente as grandes crises do petróleo o país buscou antecipar sua produção a fim de conseguir a auto-suficiência

(Lucchesi, 2011). Apesar de diferentes valores e diferentes razões este resultado se coaduna com o obtido por MAGGIO e CACCIOLA (2009 e 2012).

O terceiro e último ciclo considerado nessas estimações foi o de águas profundas (*offshore* >400m). As estimativas desse ciclo são representadas pelas curvas Multi3(k), onde os diferentes níveis de probabilidade 1P; 2P e 3P foram testados. Para este ciclo os níveis do pico de produção  $P_m$  foram de: 2,33; 3,3 e 6,45 milhões de barris por dia (MMbbl/d), os tempos de pico  $T_m$  foram de: 2015; 2022 e 2035, os tempos de meia vida  $c$  foram de: 51,2; 62,7 e 74,7 anos e os coeficientes  $k_s$  minimizados foram de 0,97; 0,98 e 0,96, respectivamente aos níveis de probabilidade antes mencionados.

Para a ilustração comparativa entre os diferentes níveis de reservas estimados, a Figura 22 representa cada nível de reserva das curvas multi-Hubbert correspondentes. Com dada curva é possível observar a expansão dos picos de produção, como bem, o distanciamento entre tais picos ilustrando os efeitos das expansões das reservas na modelagem multi-Hubbert modificado.



**Figura 22: Curvas multi-Hubbert modificado comparativas em relação a diferentes URR adotados (exceto recursos do pré-sal)**

A Figura 22 mostra as variações gráficas das curvas estimadas conforme o modelo multi-Hubbert modificado, para diferentes níveis de URR. Em Multi-Hubbert(k) (1P) é identificado o primeiro cenário proposto, onde as reservas remanescentes são dotadas de um volume final de 15,2 bilhões de barris de petróleo (P95). Com esse montante ainda a ser explorado, a produção de petróleo no Brasil teria seu pico de produção em 2015 com um máximo de 2,37 milhões de barris por dia, e depois viria a decrescer a uma taxa  $b = 0,13$  até o fim do volume remanescente. Como argumentado, este não deve ser o cenário mais provável para a produção brasileira no pós-sal, mas indica uma possível trajetória de produção na falta de adição de novas reservas.

Em Multi-Hubbert(k) (2P) se tem o segundo cenário proposto com as reservas a serem exploradas de 33,85 bilhões de barris. Sob esta perspectiva o Brasil conheceria seu pico de produção (exceto pós-sal) em 2022 com o pico produtivo de 3,33 milhões de barris por dia, e posteriormente viria a decrescer sua produção a uma taxa  $b = 0,11$ . A literatura indica que esse nível de reservas (2P) gera o cenário mais provável de produção dos campos do pós-sal brasileiro.

O terceiro e último cenário consiste na curva Multi-Hubbert(k) (3P) apresentada com reservas remanescentes de 92,52 bilhões de barris. Com esse montante o Brasil tenderia a conhecer seu pico de produção em 2035 com um pico de 6,59 milhões de barris, onde a partir daí decresceria sua produção a uma taxa  $b = 0,09$ . Nesse nível de reservas tal produção é considerada improvável.

É percebido que para os anos iniciais há pouca ou nenhuma modificação entre as curvas, isso é um comportamento almejado, pois revela que as três estimativas estão próximas e explicam bem os dados da curva observada.

A Tabela 1 mostra todos os dados observados em cada ciclo e etapas estimadas para a produção brasileira de petróleo no pós-sal.

**Tabela 1: Parâmetros obtidos para a estimação da produção brasileira de petróleo no pós-sal (isto é, sem considerar recursos do pré-sal)**

|            | <b>Ciclos</b>                      | <b>Tmax<br/>(anos)</b> | <b>Pmax<br/>(Mbbl/d)</b> | <b>SQM<br/>(%)</b> | <b>b</b> | <b>k</b> | <b>URR<br/>(MMbbl)</b> |
|------------|------------------------------------|------------------------|--------------------------|--------------------|----------|----------|------------------------|
| <b>P95</b> | <i>Onshore</i>                     | 2015                   | 2370                     | 1.24               | 0,15     | 1,00     | 1414                   |
|            | <i>Offshore&lt;400m</i>            |                        |                          |                    | 0,19     | 0,83     | 2287                   |
|            | <i>Offshore&gt;400m</i>            |                        |                          |                    | 0,14     | 0,97     | 25404                  |
|            | <b>Multi-Hubbert<br/>(k) (P95)</b> |                        |                          |                    | -        | -        | 29104                  |
| <b>P50</b> | <i>Onshore</i>                     | 2022                   | 3327                     | 1.66               | 0,15     | 1,00     | 1414                   |
|            | <i>Offshore&lt;400m</i>            |                        |                          |                    | 0,16     | 0,94     | 2287                   |
|            | <i>Offshore&gt;400m</i>            |                        |                          |                    | 0,11     | 0,98     | 44054                  |
|            | <b>Multi-Hubbert<br/>(k) (P50)</b> |                        |                          |                    | -        | -        | 47754                  |
| <b>P5</b>  | <i>Onshore</i>                     | 2035                   | 6592                     | 2.02               | 0,15     | 1,00     | 1414                   |
|            | <i>Offshore&lt;400m</i>            |                        |                          |                    | 0,16     | 0,93     | 2287                   |
|            | <i>Offshore&gt;400m</i>            |                        |                          |                    | 0,09     | 0,96     | 102725                 |
|            | <b>Multi-Hubbert<br/>(k) (P5)</b>  |                        |                          |                    | -        | -        | 106425                 |

A Tabela 1 apresenta os principais parâmetros das estimativas das curvas geradas para os gráficos das Figuras 19, 20, 21 e 22. Os resultados destes dados partiram inicialmente de estimações das variáveis  $P_m$  e  $T_m$  conforme as Eq. 48 e Eq. 49.

Para realização das estimações do multi-Hubbert modificado, inicialmente os  $c$ 's foram considerados iguais a 27 anos (SZKLO ET AL, 2007) e os  $k$ 's foram considerados iguais a 1. Dessa forma, um conjunto de dados foi gerado, os quais retratariam funções multi-Hubbert simples (ver Anexo 2). Posteriormente os  $b$ 's e os  $k$ 's tratados nas funções simples como variáveis exógenas determinadas foram otimizados por mínimos quadrados para cada etapa e ciclo, a fim de adequar melhor a curva final. Com a minimização dos  $b$ 's, novos  $c$ 's foram encontrados e assim reinseridos na fórmula para a adequação de todos os outros fatores dependentes. As minimizações dos  $b$ 's e  $k$ 's buscaram o menor valor do erro quadrático médio relativo, que adequasse a curva multi-Hubbert gerada aos dados observados e, assim, a curva inicial foi transformada em uma curva multi-Hubbert modificada.

O cálculo dos erros se deu a partir da diferença entre as curvas estimadas via um multi-Hubbert simples e a curva histórica (ver Anexo 3). O desvio percentual médio referido na Tabela 1 são: a raiz quadrada da soma dos desvios ao quadrado divididos pela produção total observada no período. Como as demais variáveis, os desvios percentuais médios calculados para os ciclos multi-Hubbert estimados foram de: 1,241; 1,663 e 2,016%, respectivos as probabilidades 1P; 2P e 3P. Dessa forma os resultados foram aceitos ao se considerar um teste de hipótese com  $\sigma = 5$ .

No Anexo 2 são apresentados os resultados dos parâmetros obtidos nas estimações do modelo muti-Hubbert simples que foram realizados para calibrar o modelo multi-Hubbert modificado. A identificação desses parâmetros é um bom indicativo para a compreensão de como o modelo modificado pode influenciar os resultados finais.

#### **4.4. Discussão**

As estimativas realizadas na Seção anterior foram propostas a fim de elaborar cenários para um possível pico da produção brasileira de petróleo utilizando a

metodologia multi-Hubbert modificada desenvolvida por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012).

Os resultados gerados corroboraram com a teoria desenvolvida por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012), onde a variável de ajuste  $k$  estaria compreendida entre os valores 0 e 1 e assim a produção brasileira de petróleo sofreu um “alargamento do pico de produção<sup>49</sup>”. Já a adoção variável  $k=1$  para um primeiro ciclo de produção (para este trabalho o ciclo *onshore*) foi considerado uma premissa do modelo e dessa forma tal ciclo seguiu uma curva simples de Hubbert conforme a assunção dos autores.

Outra característica ao comparar os resultados encontrados por esta dissertação aos encontrados por MAGGIO & CACCIOLA (2012) ocorre entre as porcentagens dos erros quadráticos médios medidos. Em MAGGIO & CACCIOLA (2012) os erros variaram entre 2,3 e 2,5% nas três amostras realizadas pelos autores, enquanto as estimações realizadas nesta dissertação compreenderam erros entre 1,2 e 2%. Dada diferença pode ter ocorrido devido as amostras utilizadas, tanto sob o aspecto quantitativo quanto qualitativo; devido as diferentes características entre as curvas de produção assumidas em ambos os trabalhos e por se tratarem de estudos de casos diferentes, onde essa dissertação aborda uma região específica (Brasil) enquanto em MAGGIO & CACCIOLA (2012) o estudo tratou da reserva mundial de petróleo.

Já em relação aos outros fatores estimados, foram obtidas quatro diferentes referências sobre previsões de produção do petróleo brasileiro que utilizaram curvas de Hubbert para suas estimativas (SZKLO ET AL, 2007; FERREIRA, 2005 e NASHAWI, et al., 2010a, 2010b). Tais resultados serviram como termos comparativos aos resultados encontrados nesta dissertação. SZKLO ET AL (2007) utilizaram curvas simples de Hubbert para as estimativas da produção brasileira de petróleo. Os autores consideraram três URRs conforme probabilidades para reservas provadas consideradas à época: P75; P50 e P30. Já NASHAWI ET AL (2010b) utilizam o nível de reserva P75 proposto por SZKLO ET AL (2007) e realizam estimações a abordagem multi-Hubbert proposta em NASHAWI ET AL (2010a).

O nível de URR em P75 de 41,03 bilhões de barris se aproxima em valores absolutos aos utilizados nesta dissertação para 2P de 47,7 bilhões de barris e, assim, é um importante indicativo para comparação. O resultado de SZKLO ET AL (2007) foi

---

<sup>49</sup> Tradução de “*fatter top*” (MAGGIO & CACCIOLA, 2009)

de um pico de produção de 3,28 MMbbl/d em 2020 e para NASHAWI ET AL (2010b) foi de um pico de 4,27 MMbbl/d também em 2020. O resultado de SZKLO ET AL (2007) se coaduna com o que aqui foi obtido: pico de 3,33 milhões de barris por dia em 2022, dado a diferença da URR testada e devido à capacidade do modelo multi-Hubbert variado de alargar o pico de produção.

Já o resultado NASHAWI ET AL (2010b) relativamente à data do pico de produção concorda com o resultado deste estudo. Contudo, o pico de produção excedeu em muito as estimações aqui encontradas. Este fato pode advir da diferença entre a solução do modelo de NASHAWI ET AL (2010b) por uma polinomial, enquanto o modelo aqui testado foi solucionado por derivações. Outra explicação poderia estar entre a diferença das amostras temporais utilizadas para ajustar os modelos. NASHAWI ET AL (2010b) objetivaram a estimacão da produção de petróleo de 47 diferentes países e utilizaram uma média da produção para os anos de 2006-2009 de todos esses países. Já esta dissertação objetivou apenas a explicação da produção do território brasileiro e utilizou a evolução da produção histórica do Brasil desde 1954 até 2012. Dessa forma é possível compreender que as estimacões de NASHAWI ET AL (2010b) podem conter fatores enviesados de um período restrito, enquanto este trabalho buscou explicar o formato da curva de produção brasileira em todo seu período de produção significativa.

Já em FERREIRA (2005) foi utilizada uma função multi-Hubbert simples. O referido autor testou três conjuntos separados de multi-Hubbert para no final somá-los e atingir uma curva multi-Hubbert nacional. Os conjuntos testados foram: produção terrestre; produção marítima e produção de LGN (Líquido de Gás Natural). A URR final utilizada pelo autor para a produção final de petróleo brasileiro foi de 22 bilhões de barris, valor próximo aos 29,1 bilhões de barris testados na probabilidade P95 nesta dissertação. O valor encontrado por FERREIRA (2005) para o pico de produção foi de 2,2 milhões de barris por dia em 2010, que está próximo aos 2,34 milhões de barris por dia em 2015, estimados nesta dissertação para reservas P95.

#### **4.5. Um exercício preliminar para o pré-sal**

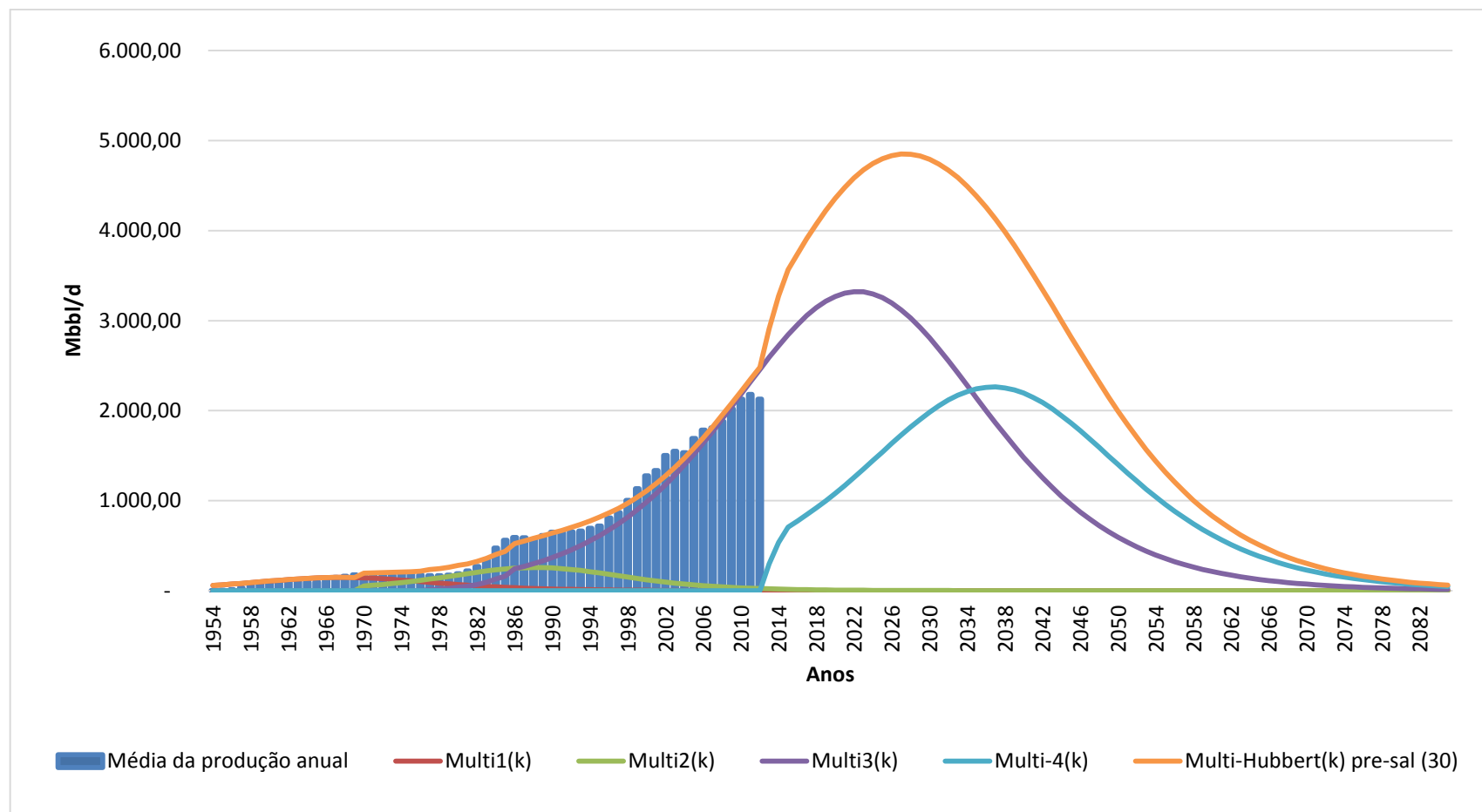
Como antes explicado, os resultados deste subcapítulo serão realizados apenas a guisa de exercício prático, na medida em que não existem ainda dados de produção observados no pré-sal brasileiro que permitam o ajuste de mínimos quadrados de curvas

de produção. Dessa forma foi nesta seção proposto um exercício que considera três cenários para o pré-sal, considerando reservas de: 30, 50 e 100 bilhões de barris de petróleo. Note-se que não se busca aqui realizar a projeção da produção do petróleo localizado na região do pré-sal, mas tão-somente elaborar um exercício a respeito, assumindo que o perfil de produção será análogo ao do terceiro ciclo identificado nas seções anteriores deste capítulo.

Para este exercício o ciclo do pré-sal foi inserido como um quarto ciclo nas curvas referentes à probabilidade 2P atribuída ao pós-sal do modelo multi-Hubbert modificado, antes aplicado. Para os cálculos do pico de produção, bem como a data de pico do pré-sal, foi suposto que o ritmo de produção para este ciclo seria o mesmo que a do terceiro ciclo do pós-sal. Dessa forma optou-se pela utilização do mesmo tempo de meia vida  $c$  e do fator de correção  $k$  calculados no terceiro ciclo para as reservas com probabilidade 2P (amostra mais provável de ocorrência para o pós-sal), devido a não existência de dados suficientes que permitam parametrizar o formato da curva de produção exclusiva do pré-sal.

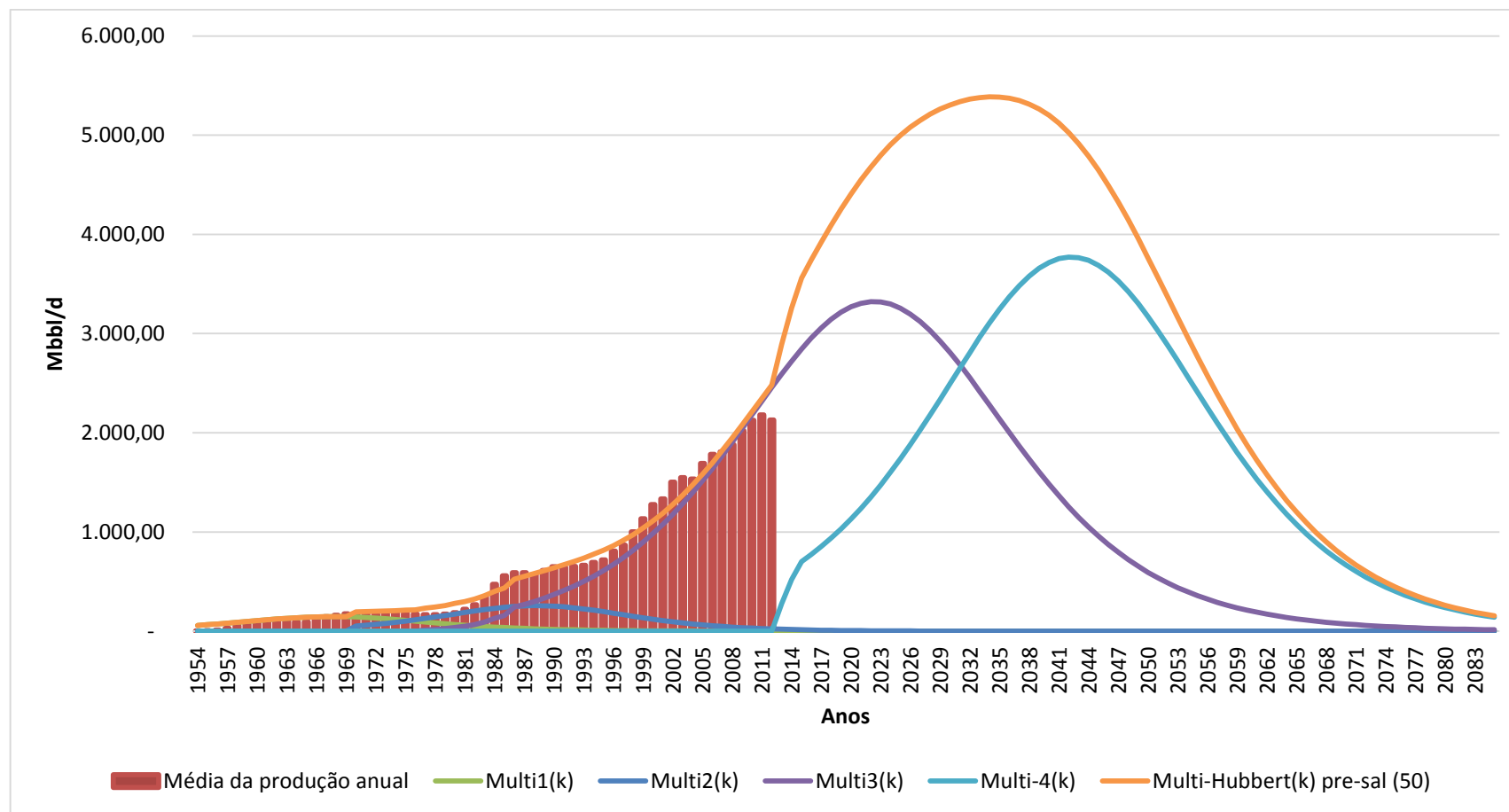
Uma característica peculiar das estimações multi-Hubbert modificado realizadas nesta dissertação ao estimar a curva do quarto ciclo foi a necessidade de suavizar o início da curva de produção do pré-sal, que ocorria de forma abrupta devido ao elevado nível de reservas e o ano de início de produção (2008).

O primeiro cenário proposto para o pré-sal considerou de forma *ad hoc* reservas de 30 bilhões de barris a partir das hipótese de DALLA COSTA & SOUZA-SANTOS (2009). Supondo esse nível de reserva o URR final totaliza um montante para as estimações de 77,7 bilhões de barris de petróleo para o estado brasileiro, ao se considerarem as reservas estimadas para o pós-sal em 47,7 bilhões de barris. A Figura 23 ilustra como seria o comportamento das curvas de produção brasileira supondo reservas dessa magnitude.



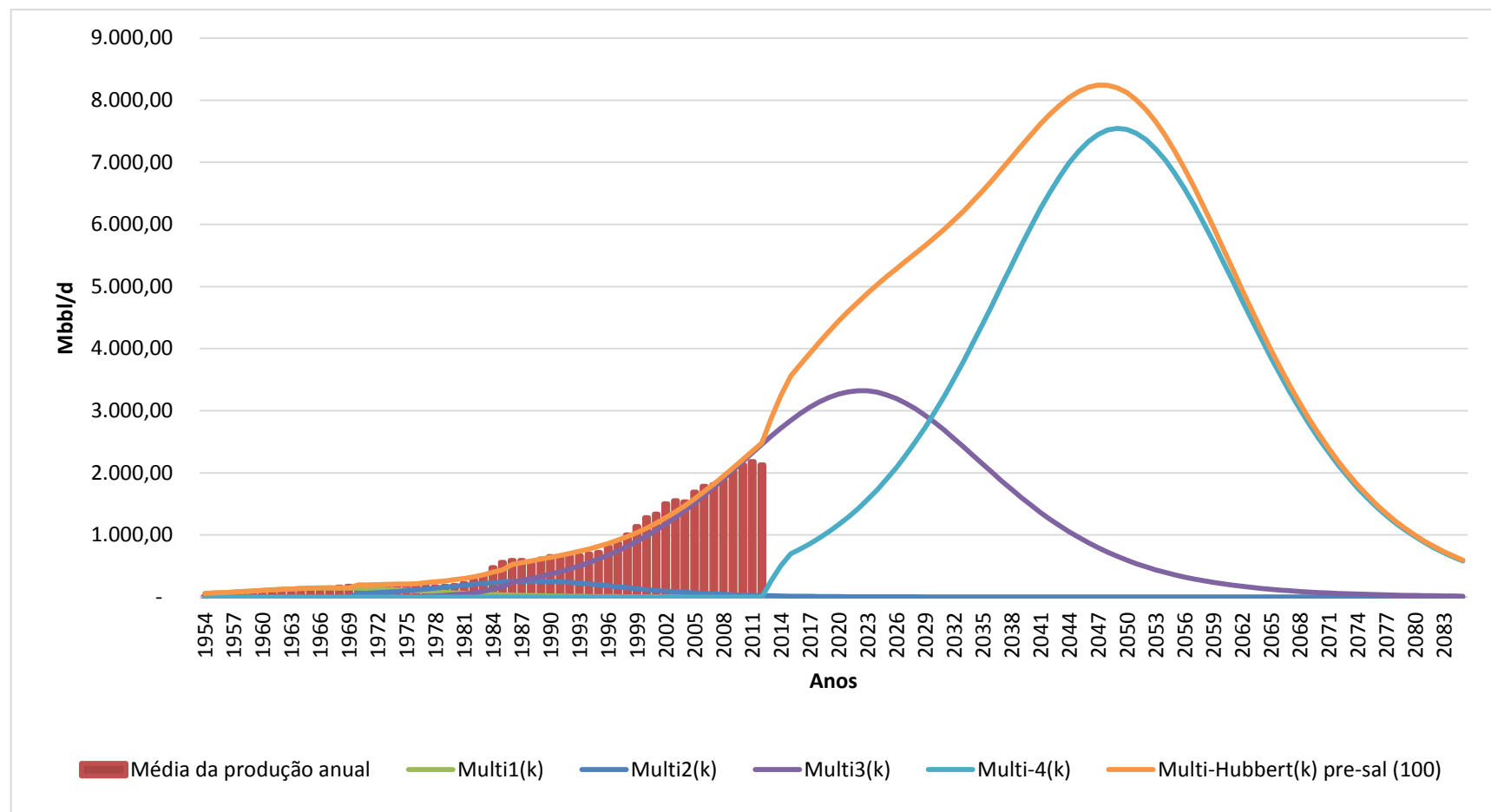
**Figura 23: Curvas multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 77,7 bilhões de barris de petróleo (incluindo recursos do pré-sal)**

O segundo cenário considerado para o pré-sal supõe um nível de reservas de 50 bilhões de barris de petróleo, conforme FISHMAN (2010); WOOD (2010) e USGS(2012). Ao supor esse nível de reservas para o pré-sal, é obtido um nível final da URR de 97,7 bilhões de barris de petróleo. A Figura 24 ilustra as curvas multi-Hubbert modificado para este nível de reserva.



**Figura 24: Curvas multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 97,7 bilhões de barris de petróleo (incluindo recursos do pré-sal)**

O terceiro e último cenário considerado para o pré-sal supõe um nível de reservas de 100 bilhões de barris de petróleo, conforme FISHMAN (2010) e WOOD (2010). Ao supor esse nível de reservas para o pré-sal é considerado um nível total da URR de 147,7 bilhões de barris de petróleo. A Figura 25 apresenta as curvas multi-Hubbert modificado para tal nível de reserva.

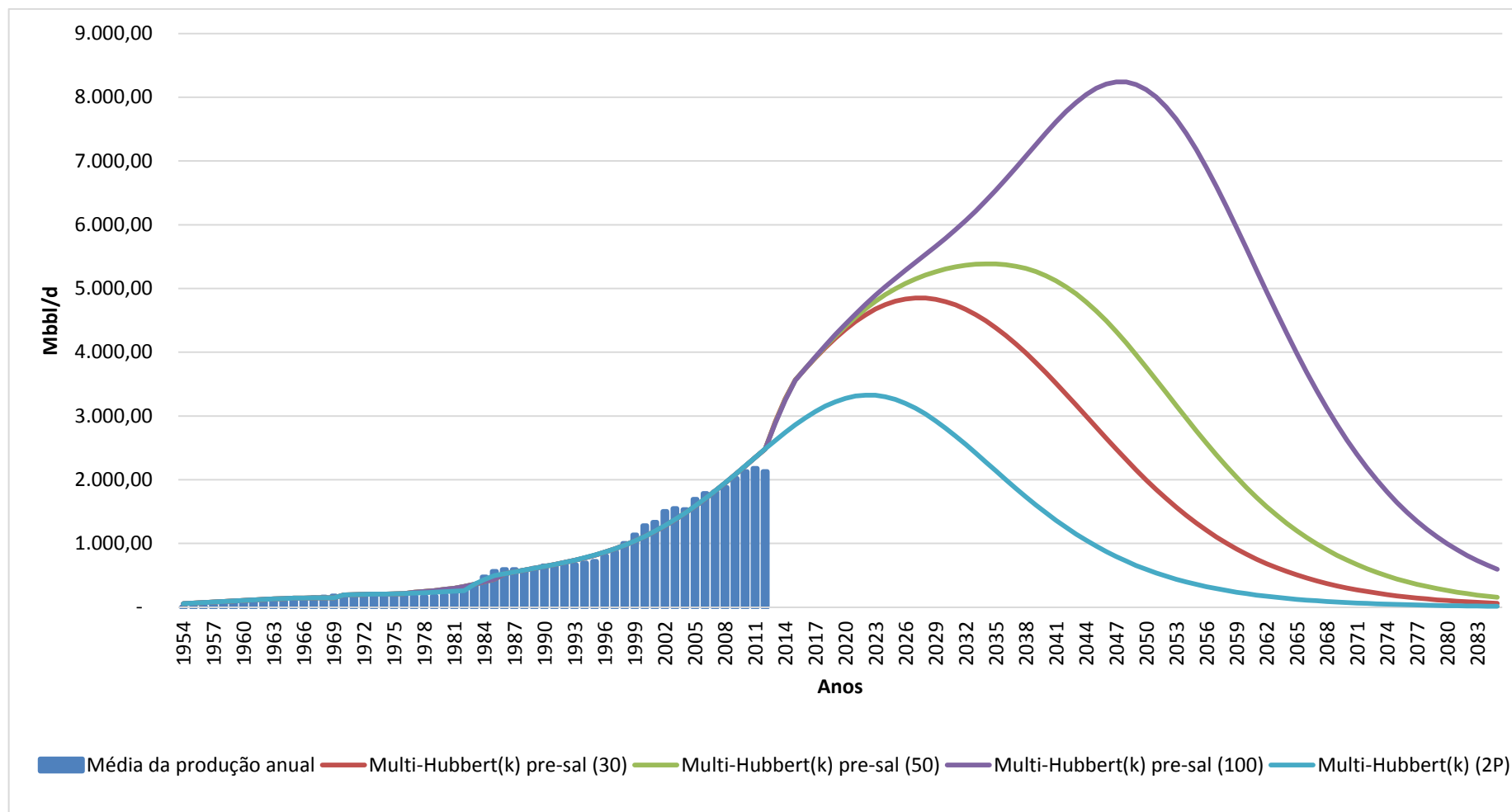


**Figura 25: Curvas multi-Hubbert para a produção brasileira de petróleo supondo um URR de 147,7 bilhões de barris de petróleo (incluindo recursos do pré-sal)**

As Figuras 23; 24 e 25 representam diferentes estimativas para três supostos níveis de reservas brasileiras incluindo o pré-sal. Elas permitem observar como a produção da camada do pré-sal poderia se comportar supondo os mesmos ritmos de produção realizados atualmente no *offshore* brasileiro, o que não necessariamente ocorrerá. A própria modificação do regime fiscal brasileiro apontaria um quadro diverso deste (LUCCHESI, 2011). Mas, não há ainda como identificar e estimar as características de ciclos produtivos associados ao pré-sal, a partir da metodologia *top down* de Hubbert, como a desenvolvida nesta dissertação.

As considerações aplicadas para tais estimações supuseram um nível de produção sustentado por probabilidades de reservas 2P para os três primeiros ciclos, devido à consideração anteriormente feita de este nível de reserva ser o mais adequado a estimações de produção de petróleo. Dessa forma os três primeiros ciclos correspondentes ao Multi1(k); Multi2(k) e Multi3(k) nas Figuras 23; 24 e 25 sempre apresentam os mesmos resultados calculados no pós-sal para o nível 2P de reservas.

O quarto e último ciclo aqui aplicado corresponde a águas ultra profundas na região do pré-sal. As estimações desse ciclo podem ser observadas pela curva Multi4(k) e foram testadas três diferentes sugestões *ad hoc* de reservas, que foram inseridas como um ciclo independente e conformaram ciclos multi-Hubbert(k) singulares com novas perspectivas para a produção brasileira. A Figura 26 ilustra os diferentes cenários e expectativas das curvas de produção esperadas com a introdução de um novo ciclo (pré-sal) e permite uma comparação ilustrativa com os cenários observados no pós-sal.



**Figura 26: Curvas multi-Hubbert modificado comparativas em relação a diferentes URR adotados (incluindo recursos do pré-sal)**

Na Figura 26 é possível verificar os diferentes comportamentos observados para as diferentes estimações para o pré-sal. Em Multi-Hubbert(k) pré-sal (30) é considerado um nível de reserva URR igual a 77,7 bilhões de barris de petróleo dos quais 63,85 bilhões de barris deverão ainda ser explorados. Para tal montante, a produção brasileira de petróleo (incluindo pré-sal) teria seu pico de produção em 2027 com um máximo de produção de 4,85 milhões de barris por dia.

Já em Multi-Hubbert(k) pré-sal (50) o cenário considerou um nível de reservas URR de 97,7 bilhões de barris de petróleo dos quais 83,85 bilhões de barris são supostamente de reservas ainda a serem exploradas. Estas reservas resultaram em uma data de pico de produção em 2034 e um pico de produção de 5,4 milhões de barris por dia.

A última estimação testada para o pré-sal é representada pela curva Multi-Hubbert(k) pré-sal (100). Neste teste foi atribuído um nível de URR de 147,7 bilhões de barris de petróleo dos quais 133,85 bilhões de barris são considerados reservas ainda a serem exploradas. Dessa forma, foi encontrado um pico de produção de 8,24 milhões de barris por dia e uma data do pico de produção em 2047<sup>50</sup>.

Os resultados encontrados para os cenários incluindo o pré-sal estenderam a capacidade produtiva do Brasil ao se comparar com os resultados anteriores quando apenas reservas do pós-sal eram consideradas. Como pode ser observado na Figura 26 quando o ciclo do pré-sal foi aderido às URR finais, um salto na produção e na data de pico de produção foi observado, quando comparado ao resultado de probabilidade 2P do pós-sal. Esse comportamento é logicamente esperado por se tratar de adição de reservas as reservas já existentes.

Contudo o interessante de ser notado na Figura 26 é que, em níveis de URR bem similares como na comparação da curva Multi-Hubbert(k) pré-sal (50) com a curva Multi-Hubbert(k) (3P) na Figura 22, o pico de produção se comportou de forma bem distinta. De fato, no segundo caso se observa um topo mais estreito com um pico atingindo valores superiores aos dos resultados encontrados em Multi-Hubbert(k) pré-sal (50). Neste último caso, percebe-se que por cerca de 30 anos o país teria produção superior a 4 milhões de barris por dia. Assim, no caso testado com mais um ciclo produtivo (pré-sal) houve um achatamento do pico de produção e o topo se tornou mais

---

<sup>50</sup> A tabela que disponibiliza todos os dados para o pré-sal está disponível em Anexo 5.

alargado. Este é um resultado interessante, pois demonstra uma das principais funções da utilização do modelo Multi-Hubbert modificado, que é exatamente permitir a identificação de patamares mais alongados de produção.

Novamente, ressalta-se que os resultados aqui desenvolvidos para a região do pré-sal, por não derivarem de estimativas probabilísticas de reservas, nem tampouco permitirem a elaboração de ajustes de mínimos quadrados, são meramente especulativos e ilustrativos de possíveis situações de produção de petróleo no Brasil.

## 5 – Considerações Finais e Recomendações de Estudos Futuros

Projeções da produção nacional de petróleo são usualmente importantes para a definição de políticas energéticas, particularmente para segurança energética, investimentos em exploração, produção e refino e para fins de diversificação da matriz energética. Esse estudo apresentou estimativas da produção brasileira de petróleo modeladas por curvas multi-Hubbert modificadas, conforme modelo desenvolvido por MAGGIO E CACCIOLA (2009; 2012).

A proposta inicial da dissertação foi apresentar os conceitos de recurso e reserva, fundamentais para o entendimento de todas as formas de modelagens apresentadas no trabalho. Na sequência buscou-se fazer uma revisão teórica das principais formas de modelagens utilizadas em estimativas da previsão de petróleo.

Iniciou-se descrevendo o modelo *Bottom up*: que consiste na soma de campos individuais de petróleo a fim de se encontrar um nível de reserva final. É por meio desta modelagem que as companhias de petróleo usualmente realizam estimações para suas tomadas de decisão empresariais. Em seguida foi descrito o modelo de dinâmica de sistemas: que seria uma tentativa de alimentar dados necessários a um modelo *top down* interagindo os mesmos a uma modelagem *Bottom up*. Porém o que se observou da literatura é que devido as grandes dificuldades metodológicas esse tipo de modelagem não é amplamente utilizada na indústria de petróleo.

Na sequência do trabalho buscou-se descrever alguns dos tipos de modelagem *top down*. Iniciou-se com o modelo mais simples R/P: o qual propõe o consumo de reservas de petróleo a níveis constantes de produção. Em seguida foram descritos alguns modelos econométricos, os quais obtêm curvas de estimação inserindo variáveis explicativas diversas (físicas, econômicas e políticas). Por fim em um capítulo aparte foi descrito em detalhes o modelo físico de HUBBERT (1956 e 1962), que, como argumentado, trata-se de um modelo que melhor explicaria curvas de produção de países *price takers* com baixa confiabilidade em seus dados, como no caso do Brasil. Após a descrição do modelo Hubbertiano e algumas de suas derivações, como o caso de MAGGIO E CACCIOLA (2009; 2012), foram apresentados os resultados da modelagem proposta.

Inicialmente foram realizadas modelagens para cenários *onshore* e pós-sal, onde três ciclos produtivos foram considerados e três diferentes níveis de probabilidades foram testados para o último ciclo produtivo, a partir de dados e estimativas da USGS. Um primeiro cenário 1P apresentou pico de produção de 2,37 MMbbl/d em 2015; um segundo cenário 2P levou a um pico de 3,33 MMbbl/d em 2022; e um terceiro nível de probabilidade P5 resultou no pico de produção de 6,59 MMbbl/d em 2035.

Os resultados indicaram que os desvios padrões-médios ficaram abaixo de 5% para estimativa da produção histórica brasileira de 1954 a 2012. Em termos da projeção da produção futura, os resultados foram consistentes, ainda que mais precisos, com o de outros estudos que usaram modelagens simples de Hubbert – um único ciclo e curva não modificada para logística.

Percebe-se, assim, que o modelo modificado aqui aplicado possui vantagens, especialmente por permitir a simulação de mais de um ciclo produtivo e, a partir da introdução de um fator de ajuste  $k$ , econometricamente ajustar a proporcionalidade dos efeitos de depleção e informação inicialmente tratados por Hubbert como uma logística com relações lineares e proporcionais – i.e., uma logística que assume que o ritmo de produção é estritamente proporcional em primeiro grau a tanto o efeito depleção quanto o efeito informação. Outros modelos e variantes de Hubbert poderiam ser testados, neste sentido. Um exemplo seria uma função do tipo Verhulst (Eq. 55), em que o ritmo de produção de um mineral sofre um efeito linear da informação acumulada com a descoberta do recuso, mas sofre um efeito não linear da depleção do recurso. Foge ao escopo desta dissertação desenvolver esta modelagem, mas ela poderia ser testada em trabalhos futuros, complementares ao aqui desenvolvido.

$$P(t) = \frac{Q_{\infty}}{n\tau} \frac{(2^n - 1) \exp\left(\frac{t - t_{\frac{1}{2}}}{\tau}\right)}{\left[1 + (2^n - 1) \exp\left(\frac{t - t_{\frac{1}{2}}}{\tau}\right)\right]^{\frac{n+1}{n}}}$$

Eq. 45

Em seguida foram testados, apenas à guisa de exemplo, três níveis hipotéticos de reservas para o pré-sal como um novo ciclo de produção. A literatura científica

normalmente indica que o nível de reservas 2P gera o cenário mais provável de produção dos campos do pós-sal brasileiro. Dessa forma foi este o cenário escolhido como a base para a adição do quarto ciclo produtivo associado ao pré-sal. O primeiro cenário supôs a adição de 30 bilhões de barris às reservas e apresentou um pico de produção de 4,85 MMbbl/d em 2027; o segundo cenário supôs a adição de 50 bilhões de barris e apresentou um pico de produção de 5,4 MMbbl/d em 2034, e o terceiro cenário supôs a adição de 100 bilhões de barris e apresentou um pico de produção 8,24 MMbbl/d em 2047.

Os resultados para o pós-sal estão de acordo com a literatura correspondente. No caso dos resultados do pré-sal, a dissertação indicou que, com a adição de ciclos produtivos e do fator  $k$  ao modelo clássico de Hubbert, foi possível conferir maior flexibilidade à modelagem.

Porém, para os cenários considerados para o pré-sal, seria necessário obter níveis reais de probabilidade de adição de reservas, bem como uma amostragem real de sua produção, para que se pudesse realizar a minimização dos desvios quadrados e, assim, ajustar os resultados à curva de produção efetivamente observada. Logo, estudos futuros também deveriam aprimorar a curva referente ao pré-sal, a partir de melhores estimativas de reservas e dados reais de produção (uma série mais longa). Por exemplo, nada impede que o ciclo do pré-sal inclua mais de uma curva de produção, devido aos diferentes regimes fiscais que regem a exploração e produção nesta região: concessão, partilha de produção e cessão onerosa. Mas, para testar este fato, novamente é necessário obter uma série mais extensa de dados de produção.

Por fim esse estudo demonstrou que a utilização do modelo multi-Hubbert modificado possui um formato interessante para as previsões da produção de petróleo brasileira além de possuir maior flexibilidade para adequação dos dados estimados aos dados observados, quando comparado ao modelo de Hubbert simples ou ao modelo multi-Hubbert simples.



## Referências Bibliográficas

- Adelman, M. A., 2002. The Quarterly Review. Economics and Finance 42, 169–191.
- ANP (Agencia Nacional de Petróleo), 2012. Disponível em: /<http://www.anp.gov.br> acesso em: 22/10/2012
- Bacoccoli, G., e Cuñia Filho, E., 2004. Aplicação do Indicador de Intensidade Exploratória como Ferramenta de Focalização. In: IBP, Rio Oil and Gas Exposition and Conference, Rio de Janeiro.
- Bardi U., 2005. The mineral economy: a model for the shape of oil production curves. Energy Policy 33, 53–61.
- Barthel F., et. al., 2000. Energy resources and technology options. World energy assessment: Energy and the challenge of sustainability.
- Bentley R.W., 2002. Global oil & gas depletion: an overview Energy Policy 30, 189–205
- Bentley RW. and Meng Q.Y., 2008. Global oil peaking: Responding to the case for ‘abundant supplies of oil’. Energy Policy; 33 (2008): 1179– 1184
- Bentley, R. W. (2002). Global oil & gas depletion: an overview. Energy Policy, 30:189–205.
- Bentleya R.W., Mannanb S. A., Wheeler S. J., 2007. Assessing the date of the global oil peak: The need to use 2P reserves. Energy Policy 35, 6364–6382
- Black G., 1998. Is Hotelling’s Rule Relevant to Domestic Oil Production? Journal of environmental economics and management 36, 149-169. article no. EE981042.
- Boyle, Godfrey and Bentley, Roger (2008). Global oil depletion: forecasts and methodologies. Environment and Planning B, 35(4), pp. 609–626.
- BP, 2005. Statistical Review of World Energy 2005. Disponível em: /<http://www.bp.com>. Acesso em: 26/08/2012
- Braga L. P., 2012. O processo de individualização da produção na área do pré- Sal e os potenciais problemas práticos advindos da Convivência dos três modelos de contratos internacionais de Petróleo. Tese de mestrado apresentada ao Programa Pós-graduação em Planejamento Energético, COPPE. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

- Brandt A. R., 2010. Review of mathematical models of future oil supply: Historical overview and synthesizing critique. *Energy* 35, 3958-3974
- Brandt AR., 2007. Testing Hubbert. *Energy Pol*; 35(5) 3074-88
- Campbell C. J., 2000. A new energy crisis: when will we ever learn?. (Archived at <http://dieoff.com/page202.htm>).
- Cavallo, A. J. (2004). Hubbert's Petroleum Production Model: An Evaluation and Implications for World Oil Production Forecasts. *Natural Resources Research*, Vol. 13, No. 4 DOI: 10.1007/s11053-004-0129-2.
- Cleveland C. J., 1991. Physical and economic aspects of resource quality: The cost of oil supply in the lower 48 United States, 1936-1988. *Resources and Energy* 13, 163-188. North-Holland.
- Dahl C. and Duggan T. E., 1998. Survey of Price Elasticities from Economic Exploration Models of US Oil and Gas Supply *Journal of Energy Fiice & Development*, Volume 3, Number 2, pages 129-169.
- Davidson M., 1987. A petroleum lifecycle model for the United States with endogenous technology, exploration, recovery and demand. *International conference of the system dynamic society*. China 105.
- Denmark, 2009. Overview of the Brazilian oil and gas industry. Report – Offshore Brazil Prepared For Offshore Center.
- Ferreira D., 2005. Curva de hubbert: uma análise das reservas brasileiras de petróleo, Tese de mestrado apresentada ao Programa Interunidades de Pós-Graduação em Energia PIPGE. Universidade de São Paulo, Brasil
- Fishelson G., 1983. Hotelling rule, economic responses and oil prices. Foerder Institute for Economic Research, Faculty of Social Sciences, Tel-Aviv University, Ramat-Aviv.
- Fishman A. D., 2010. Petroleum in Brazil: Petrobras, Petro-Sal, Legislative Changes & the Role of Foreign Investment, George Washington University, Washington, DC., USA
- Gaudet G. Howitt P., 1989. A Note on Uncertainty and the Hotelling Rule. *Journal of environmental economics and management* 16, 80-86.

Gowdy J. and Julia R., 2007. Technology and petroleum exhaustion: Evidence from two mega-oilfields *Energy* 32, 1448–1454

Greene D. L., 2003. Running out of and into oil: analyzing global oil depletion and transition through 2050 Department of Energy (DOE) Information Bridge: Web site: <http://www.osti.gov/bridge>.

Gujarati D. N., 2000. *Econometria Básica 3ª Edição*, Editora: Makron Books Fisher FM. Supply and costs in the United States petroleum industry. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press; 1964 (for Resources for the Future).

Hart R., Spiro D., 2011. The elephant in Hotelling's room. *Energy Policy* 39, 7834–7838

Hotelling, H., 1931. The economics of exhaustible resources. *The Journal of Political Economy* 39, 137–175.

Hubbert MK. Nuclear energy and the fossil fuels. In: Shell development company. Publication No. 95; June 1956. p. 1–40.

Hubbert, M. K. (1962). Energy resources. Technical Report 1000-D, National Academy of Science – National Research Council.

IEA (2009). *World Energy Outlook 2009*. Technical report, International Energy Agency. Imam, A., Startzman, R. A., and Barrufet, M. A. (2004).

Jacobsen H. K., 1998. Integrating the bottom-up and top-down approach to energy economy modelling: the case of Denmark. *Energy Economics* 20, 443–461

Jakobsson K. et. al., 2012. The end of cheap oil: Bottom-up economic and geologic modeling of aggregate oil production curves. *Energy Policy* 41, 860–870

Jevons, W., 1866. *The Coal Question. An Inquiry Concerning the Progress of the Nation, and the Probable Exhaustion of Our Coal-Mines*, second ed. revised. Macmillan, London. Disponível em: <http://www.econlib.org/library/YPDBooks/Jevons/jvnCQ.htm>

Kaufmann R. K., 1991. Oil production in the lower 48 states: reconciling curve fitting and econometric models. *Resour Energy*;13(1):111e27.

Kaufmann R. K., Cleveland CJ. Oil production in the lower 48 states: economic, geological, and institutional determinants. *Energy J* 2001;22(1):27e49.

Kaufmann R. K., Karadel P. e di Mauro F. 2008. Will oil prices decline over the long run? European Central Bank (2008).

Kaufmann R. K., Shiersb L. D., 2008. Alternatives to conventional crude oil: When, how quickly, and market driven? *Ecological economics* 67, 405–411.

King K., Deng A., and Metz D., 2012. An Econometric Analysis of Oil Price Movements: The Role of Political Events and Economic News, Financial Trading, and Market Fundamentals. Bates White Economic Consulting, Washington, DC, USA.

Krautkraemer J. A., 1989. Price Expectations, Ore Quality Selection, and the Supply of a Nonrenewable Resource. *Journal of environmental economics and management* 16,253-267

Krautkraemer J. A., 1998. Nonrenewable Resource Scarcity *Journal of Economic Literature*, Vol. 36, No. 4., pp. 2065-2107

Laherrère J. H., 2001. Estimates of Oil Reserves. Paper presented at the EMF/IEA/IEW meeting IIASA, Laxenburg, Austria. Plenary Session I: Resources.

Laherrère J. H., 2003. Modelling future oil production, population and the economy. ASPO Second international workshop on oil & gas, Paris

Laherrère, J. H., (2009). Creaming curves & cumulative discovery at end 2007 by continents. ASPO France website. [http://aspofrance.viabloga.com/files/JL\\_cream\\_end2007.pdf](http://aspofrance.viabloga.com/files/JL_cream_end2007.pdf) (25/11/12).

Laherrère, J. H., (2010). Cumulative oil & gas discovery versus time, exploratory drilling, success ratio and average field size per continent. ASPO France website. [http://aspofrance.viabloga.com/files/JL\\_cream\\_end2007.pdf](http://aspofrance.viabloga.com/files/JL_cream_end2007.pdf) (25/11/12).

Laherrère, J. H., (2012). Updating world deepwater oil & gas discovery. ASPO France website. [http://aspofrance.viabloga.com/files/JL\\_cream\\_end2007.pdf](http://aspofrance.viabloga.com/files/JL_cream_end2007.pdf) (25/11/12).

Laherrère, J.H., 1997. Multi-Hubbert modeling. Disponível em: <http://www.oilcrisis.com/laherrere/multihub.htm>. Acesso em: 25/09/2012

Lina C., Wagner G., 2007. Steady-state growth in a Hotelling model of resource extraction *Journal of Environmental Economics and Management* 54, 68–83.

- Lucchesi R. D., 2011. Regimes fiscais de exploração e produção de petróleo no Brasil e no mundo. Tese de mestrado apresentada ao Programa Pós-graduação em Planejamento Energético, COPPE. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- Maggio G, Cacciola G., 2009. A variant of the Hubbert curve for world oil production forecasts. *Energy Policy*; 37(11):4761–70.
- Maggio G., Cacciola G., 2012. When will oil, natural gas, and coal peak?. *Energy Policy*; 98, 111–123.
- Maugeri L., 2012. Oil: The Next Revolution The unprecedented upsurge of oil production capacity and what it means for the world, The Geopolitics of Energy Project, Harvard University, Cambridge, MA., USA
- Miller R. G., 2011. Future oil supply: The changing stance of the International Energy Agency. *Energy Policy* 39, 1569–1574.
- Mohr S., 2010. Projection of world fossil fuel production with supply and demand interactions. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering (Chemical) The University of Newcastle, Australia.
- Mohr, S. H. and Evans, G. M. (2009). Long term prediction of unconventional oil production. *Energy Policy*. Article in Press.
- Moroney, J. R. and Berg, M. D. (1999). An integrated model of oil production. *The Energy Journal*, 20(1):105–124.
- Nashawi I. S., Malallah A. and Al-Bisharah M., 2010a. Forecasting World Crude Oil Production Using Multicyclic Hubbert Model. *Energy Fuels* 2010, 24, 1788–1800
- Nashawi I. S., Malallah A., Al-Bisharah M. and Kuwati University, 2010b. Modeling World Oil Supply: Its Peak Production Rate and Time - Model Validation SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, 18-20 October 2010, Brisbane, Queensland, Australia. Doi 10.2118/133208-MS.
- Owenn N. A., Inderwildi O. R., King D. A., 2010. The status of conventional world oil reserves: Hype or cause for concern?. *Energy Policy* 38, 4743–4749
- Patzek T. W., Croft G. D., 2010. A global coal production forecast with multi-Hubbert cycle analysis. *Energy* 35, 3109–3122

- Pearce D. W., Turner R. K., 1990. Economics of natural resources and the environment. The Johns Hopkins University Press Baltimore, Maryland, USA.
- Radchenko S., 2005. The Long-Run Forecasting of Energy Prices Using the Model of Shifting Trend. Department of Economics, University of North Carolina at Charlotte, NC 28223, USA.
- Rehrl, T., Friedrich, R., 2006 Modelling long-term oil price and extraction with a Hubbert approach: the LOPEXmodel. Energy Policy, in press, doi:10.1016/j.enpol.2005.03.021.
- Reynolds D. B., 1999. The mineral economy: how prices and costs can falsely signal decreasing scarcity Ecological Economics 31, 155–166.
- Reynolds D. B., 2012. The Mineral Economy: How Prices and Costs Can Falsely Signal Decreasing Scarcity. (Archived at [http:// greatchange.org/ov-reynolds.html](http://greatchange.org/ov-reynolds.html)).
- Reynolds D. B., Baek J., 2012. Much ado about Hotelling: Beware the ides of Hubbert. Energy Economics 34, 162–170
- Reynolds, D. B., Pippenger M. K., 2010. OPEC and Venezuelan oil production: evidence against a cartel hypothesis. Energy Policy, 38, 6045-6055.
- Schindler S., 2007. Rehabilitating theory: refusal of the ‘bottom-up’ construction of scientific phenomena. Stud. Hist. Phil. Sci. 38, 160–184.
- Smith J. L. 2011. On The Portents of Peak Oil (And Other Indicators of Resource Scarcity). Department of Finance Southern Methodist University Dallas, TX 75275, USA.
- Sorrell S., et. al., 2012. Shaping the global oil peak: A review of the evidence on field sizes, reserve growth, decline rates and depletion rates Energy 37, 709-724.
- Sorrell, S., Speirs, J., Bentley, R.W., Brandt, A.R., Miller, R.G., 2010. Global Oil Depletion: A review of the evidence. Energy Policy 38, 5290–5295
- Stefanou S. E., et. al., 2008. Productivity Growth and Efficiency under Leontief Technology: Na Application to US Steam-Electric Power Generation Utilities. Armsby, Pennsylvania State University, University Park, PA, USA.
- Sterman J. D., 1982. Economic vulnerability and the energy transition School of Management. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 02139, USA.

- Sterman J. D., 1983. An experiment to evaluate methods for estimating fossil fuel resources. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 02139, USA.
- Suryan R. M., et. al., 2006, Site-specific effects on productivity of an upper trophic-level marine predator: Bottom-up, top-down, and mismatch effects on reproduction in a colonial seabird. *Progress in Oceanography* 68, 303–328.
- Szklo, A., Machado, G., Schaeffer, R., 2007. Future oil production in Brazil—Estimates based on a Hubbert model. *Energy Policy* 35, 2360–2367
- Taylor P. J., 1998. Author's reply to discussion of modeling the u.s. oil industry: how much oil is left?. *Society of Petroleum Engineers – SPE* – 52597
- Uri N. D., 1979. Domestic crude oil resource appraisal. Department of economics and business, Catholic University of America, Washington, DC, 20064, USA
- USGS, 2000. US World Geological Survey Petroleum Assessment—Description and Results, Washington, DC.
- USGS, 2012. US World Geological Survey Petroleum Assessment—Assessment of Undiscovered Conventional Oil and Gas Resources of South America and the Caribbean, 2012. Washington, DC.
- Varian H. R., 2003. *Microeconomia princípios básicos, uma abordagem moderna*. Editora Campus, Tradução da 6<sup>a</sup> edição Americana.
- Wing I. S., 2008. The synthesis of bottom-up and top-down approaches to climate policy modeling: Electric power technology detail in a social accounting framework. *Energy Economics* 30, 547–573
- Wood D., 2010. The Outlook for Energy Reform in Latin America, Woodrow wilson center update on the americas, Latin American Program.
- Yergin D. and Hobbs D., 2005. *In Search of Reasonable Certainty Oil and Gas Reserves*. Cambridge Parkway - Cambridge, MA 02142, USA.

## Sites:

ANP (Agencia Nacional de Petróleo), 2012. Disponível em: <http://www.anp.gov.br/?pg=63482&m=&t1=&t2=&t3=&t4=&ar=&ps=&cachebust=1358026715186> Acesso em: 24/10/2012

Beyond Petroleum (BP), 2012 Nobody knows or can know how much oil exists under the earth's surface or how much it will be possible to produce in the future. Disponível em: <http://www.bp.com/sectiongenericarticle800.do?categoryId=9037318&contentId=7068756> Acesso em: 27/06/2012

Beyond Petroleum (BP), 2012. Statistical Review of World Energy 2012. Disponível em: <http://www.bp.com/sectionbodycopy.do?categoryId=7500&contentId=7068481> Acessado em: 22/10/2012

Exxonmobil, 2012. Disponível em: [http://www.exxonmobil.com/Corporate/history/about\\_who\\_history.aspx](http://www.exxonmobil.com/Corporate/history/about_who_history.aspx) Acesso em: 01/07/2012

<http://www.petrobras.com.br/pt/quem-somos/> 11/07/2012

IEA, “*World Energy Model*” (WEM). Disponível em: <http://www.iea.org/weo/model.asp> Acessado em: 17/07/2012 e <http://www.worldenergyoutlook.org/weomodel/> Acessado em: 23/07/2012

Petrobras, 2012. Relacionamento com investidores. Disponível em: <http://www.investidorpetrobras.com.br/pt/destaques-operacionais/producao/> Acessado em: 24/10/2012

Petrobras, 2013. Sistema de produção antecipada. Disponível em: <http://memoria.petrobras.com.br/depoentes/louise-pereira-ribeiro/instalado-o-sistema-de-producao-antecipada#.URafoKVyEfE> Acesso em: 09/02/2013

SPE (Sociedade portuguesa de estatística), 2009. Modelos Económicos. Disponível em: [http://www.spestatistica.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=143%3Apremio-estatistico-junior-2009&catid=1%3Anoticias-recntes&Itemid=55&lang=pt](http://www.spestatistica.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=143%3Apremio-estatistico-junior-2009&catid=1%3Anoticias-recntes&Itemid=55&lang=pt) Acesso em: 24/11/2012

TCU (Tribunal de contas da união), 2012. Pré-sal e regime de partilha de produção. Disponível em [www.tcu.gov.br/controleregulacao](http://www.tcu.gov.br/controleregulacao) Acesso em: 27/11/2012

THOMAS, 2001. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/30404058/Fundamentos-de-Engenharia-de-Petroleo> Acesso em: 30/07/ 2012

Roper L. D., 2012. Disponível em: <http://www.roporld.com/science/minerals/verhulstfunction.htm> Acesso em: 10/02/2013

## Apêndices

### Apêndice A

Conforme descrito por SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) a logística de Hubbert é uma solução da equação:

$$\delta CD(t)/\delta t \propto CD(t). (Q_{\infty} - CD(t)) \quad (A1)$$

Desde que essa equação seja uma proporcionalidade entre a taxa de descoberta ou produção ( $\delta CD(t)/\delta t$ ) e os efeitos de informação (positivo) e depleção (negativo), se tem:

$$\delta CD(t)/\delta t = k.CD(t). (Q_{\infty} - CD(t)) \quad (A2)$$

Onde nesse momento os autores assumem uma hipótese da existência de uma relação linear, que segundo eles tal hipótese é a principal assunção da modelagem matemática de Hubbert e descartam qualquer motivo para que tal relação seja linear. A partir de dada suposição a solução apresentada para essa derivada é:

$$CD(t) = Q_{\infty} / (1 + e^{-b(t-t_0)}) \quad (A3)$$

E refazendo-se a derivada anterior, se obtém que:

$$dCD(t)/dt = Q_{\infty} * b * e^{-b(t-t_0)} / [1 - e^{-b(t-t_0)}] \quad (A4)$$

Utilizando o artifício matemático onde:

$$\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2 \quad (A5)$$

Obtém-se que:

$$e^{-t}/(1 + e^{-t}) = 1/[2*(1 + \cosh(t))] \quad (A6)$$

Assim:

$$P = (Q_{\infty} * b/2) / (1 + \cosh(-b(t-t_0))) \quad (A7)$$

Sendo:

$$Q_{\infty} = 4 * P_m / b \quad (A8)$$

Resulta na equação discreta do nível de produção  $P$  no tempo  $t$ :

$$P = 2P_m / (1 + \cosh(-b(t-t_0))) \quad (A9)$$

## Apêndice B

Conforme o exposto por NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH, 2010 a solução para se encontrar a taxa de produção da curva de Hubbert ( $dQ/dt$ ,  $q(t)$  ou  $\delta CD(t)/\delta t$ , segundo SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007)) parte de uma equação parabólica da produção acumulada ( $Q$  ou  $CD(t)$ ), conforme o expresso em B1:

$$\delta CD(t)/\delta t = q(t) = dQ/dt = aQ + bQ^2 \quad (B1)$$

Seguindo a suposição de que a taxa de produção ( $q(t)$ ) será igual a zero quando a produção acumulada ( $Q$ ) atingir seu máximo, em Últimas Reservas Recuperáveis ( $Q_\infty$ ), então a equação B1 pode ser escrita:

$$aQ + bQ^2 = 0 \quad (B2)$$

Resolvendo em função de  $b$ , se tem:

$$b = -a/Q \quad (B3)$$

Substituindo B3 em B1 e rearranjando os termos da equação é obtido:

$$adt = dQ/[Q-(Q^2/Q_\infty)] \quad (B4)$$

Assim para solucionar o problema da taxa de produção NASHAWI, MALALLAH & AL-BISHARAH, 2010 integram o lado direito da equação B4 de um tempo inicial  $t_0$  a  $t \rightarrow t_\infty$  e o lado esquerdo uma quantidade inicial  $Q_0$  a  $Q \rightarrow Q_\infty$  e encontram a solução proposta por HUBBERT (1962) da equação logística:

$$Q = Q_\infty / (1 + e^{-a(t-t_0)}) \quad (B5)$$

E realizando as substituições e derivações necessárias encontram o termo:

$$q(t) = (Q_\infty * a * e^{-a(t-t_0)}) / (1 + e^{-a(t-t_0)}) \quad (B6)$$

Que por modificações matemáticas é exatamente o termo encontrado em SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007).

## Apêndice C

Para se encontrar o valor das Últimas Reservas Recuperáveis modificada proposta por MAGGIO & CACCIOLA (2009 e 2012) se resolve a equação modificada do modelo simples e assim se expande para o Multi-Hubbert modificado, dessa forma é obtido:

Partindo da suposição de que  $t = t_m$ . Desde que  $\cosh 0 = 1$  se tem a equação de produção máxima modificada:

$$P_{max} = 2P_m / 1+k \quad (C1)$$

Assim para se obter o valor acumulado da curva de produção (obtendo assim as Últimas Reservas Recuperáveis) se tem:

$$Q_{\infty} = 2 \int_0^{t_M} 2P_m / \{1 + k \cosh[b(t-t_m)]\} \quad (C2)$$

Logo,

$$Q_{\infty} = (8P_m/b) * [\operatorname{arctgh}(\sqrt{1-k/1+k}) * \operatorname{tgh}(b*t_M/2) / \sqrt{1-k^2}] \quad (C3)$$

Entretanto, supondo um ciclo de produção normal de petróleo  $\operatorname{tgh}(b*t_M/2) \gg 1$ , o que permite a aproximação  $\operatorname{tgh}(b*t_M/2) = 1$  e assim a relação se torna:

$$Q_{\infty} = (8P_m/b) * [\operatorname{arctgh}(\sqrt{1-k/1+k}) / \sqrt{1-k^2}] \quad (C4)$$

Então,

$$Q_{\infty} = (4P_m/b) * [\ln(1+\sqrt{1-k^2}) - \ln(k)] / \sqrt{1-k^2} \quad (C5)$$

Onde, a equação C5 é obtida se aplicando a relação matemática  $\operatorname{arctgh}(x) = (1/2) * \ln[(1+x)/(1-x)]$  assim desde que:

$$\lim_{k \rightarrow 1} \{[\ln(1+\sqrt{1-k^2}) - \ln(k)] / \sqrt{1-k^2}\} = 2 \operatorname{arctgh}(\sqrt{1-k/1+k} / \sqrt{1-k^2}) = 1 \quad (C6)$$

Então,  $Q_{\infty} = 4P_m/b$ , como o esperado encontra-se a solução das Últimas Reservas Recuperáveis de HUBBERT (1962).

## Anexo

### Anexo 1

**Tabela da produção brasileira considerada para os cálculos na dissertação**

| <b>Anos</b> | <b>Produção média anual<br/>em milhares de barris<br/>por dia (Mbbl/d)</b> | <b>Produção média total<br/>anual em milhares de<br/>barris (Mbbl)</b> |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>1954</b> | 3,75                                                                       | 1.370,21                                                               |
| <b>1955</b> | 6,40                                                                       | 2.334,54                                                               |
| <b>1956</b> | 12,11                                                                      | 4.419,06                                                               |
| <b>1957</b> | 29,26                                                                      | 10.678,08                                                              |
| <b>1958</b> | 55,05                                                                      | 20.092,52                                                              |
| <b>1959</b> | 69,99                                                                      | 25.546,72                                                              |
| <b>1960</b> | 86,37                                                                      | 31.523,59                                                              |
| <b>1961</b> | 98,20                                                                      | 35.844,10                                                              |
| <b>1962</b> | 92,04                                                                      | 33.593,51                                                              |
| <b>1963</b> | 97,14                                                                      | 35.456,47                                                              |
| <b>1964</b> | 91,70                                                                      | 33.470,50                                                              |
| <b>1965</b> | 96,00                                                                      | 35.040,00                                                              |
| <b>1966</b> | 117,00                                                                     | 42.705,00                                                              |
| <b>1967</b> | 147,00                                                                     | 53.655,00                                                              |
| <b>1968</b> | 161,00                                                                     | 58.765,00                                                              |
| <b>1969</b> | 176,00                                                                     | 64.240,00                                                              |
| <b>1970</b> | 167,00                                                                     | 60.955,00                                                              |
| <b>1971</b> | 175,00                                                                     | 63.875,00                                                              |
| <b>1972</b> | 171,00                                                                     | 62.415,00                                                              |
| <b>1973</b> | 174,00                                                                     | 63.510,00                                                              |
| <b>1974</b> | 181,00                                                                     | 66.065,00                                                              |
| <b>1975</b> | 178,00                                                                     | 64.970,00                                                              |
| <b>1976</b> | 173,00                                                                     | 63.145,00                                                              |
| <b>1977</b> | 167,00                                                                     | 60.955,00                                                              |
| <b>1978</b> | 166,00                                                                     | 60.590,00                                                              |
| <b>1979</b> | 172,00                                                                     | 62.780,00                                                              |
| <b>1980</b> | 188,00                                                                     | 68.620,00                                                              |
| <b>1981</b> | 220,00                                                                     | 80.300,00                                                              |
| <b>1982</b> | 268,00                                                                     | 97.820,00                                                              |
| <b>1983</b> | 340,00                                                                     | 124.100,00                                                             |
| <b>1984</b> | 473,00                                                                     | 172.645,00                                                             |
| <b>1985</b> | 560,00                                                                     | 204.400,00                                                             |
| <b>1986</b> | 591,00                                                                     | 215.715,00                                                             |
| <b>1987</b> | 589,00                                                                     | 214.985,00                                                             |
| <b>1988</b> | 573,00                                                                     | 209.145,00                                                             |
| <b>1989</b> | 613,00                                                                     | 223.745,00                                                             |
| <b>1990</b> | 650,00                                                                     | 237.250,00                                                             |
| <b>1991</b> | 643,00                                                                     | 234.695,00                                                             |
| <b>1992</b> | 652,00                                                                     | 237.980,00                                                             |
| <b>1993</b> | 664,00                                                                     | 242.360,00                                                             |

|      |          |            |
|------|----------|------------|
| 1994 | 693,00   | 252.945,00 |
| 1995 | 718,00   | 262.070,00 |
| 1996 | 807,00   | 294.555,00 |
| 1997 | 868,00   | 316.820,00 |
| 1998 | 1.003,00 | 366.095,00 |
| 1999 | 1.133,00 | 413.545,00 |
| 2000 | 1.276,64 | 465.974,37 |
| 2001 | 1.334,42 | 487.063,00 |
| 2002 | 1.503,24 | 548.684,18 |
| 2003 | 1.548,72 | 565.282,53 |
| 2004 | 1.533,51 | 559.730,49 |
| 2005 | 1.691,02 | 617.220,96 |
| 2006 | 1.783,31 | 650.908,06 |
| 2007 | 1.809,46 | 660.453,28 |
| 2008 | 1.881,09 | 686.598,45 |
| 2009 | 2.018,95 | 736.915,11 |
| 2010 | 2.126,92 | 776.324,77 |
| 2011 | 2.179,43 | 795.492,86 |
| 2012 | 2128,4   | 776.866,00 |

## Anexo 2

Dados estimados supondo uma curva multi-Hubbert simples para o pós-sal  
(sem considerar o pré-sal)

|     | Ciclos                             | Tm<br>(anos) | Pm(Mbbl/d) | C (anos) | k | URR(MMbbl) |
|-----|------------------------------------|--------------|------------|----------|---|------------|
| P95 | <i>Onshore</i>                     | 1973         | 245,62     | 27       | 1 | 1.413,61   |
|     | <i>Offshore&lt;400m</i>            | 1990         | 397,32     | 27       | 1 | 2.286,69   |
|     | <i>Offshore&gt;400m</i>            | 2012         | 4.414,01   | 27       | 1 | 25.404,05  |
|     | <b>Multi-Hubbert<br/>(k) (P95)</b> | 2012         | 4.416,28   | -        | - | 29.104,35  |
| P50 | <i>Onshore</i>                     | 1973         | 245,62     | 27       | 1 | 1.413,61   |
|     | <i>Offshore&lt;400m</i>            | 1990         | 397,32     | 27       | 1 | 2.286,69   |
|     | <i>Offshore&gt;400m</i>            | 2018         | 7.654,4    | 27       | 1 | 44.053,53  |
|     | <b>Multi-Hubbert<br/>(k) (P50)</b> | 2018         | 7.655,5    | -        | - | 47.753,83  |
| P5  | <i>Onshore</i>                     | 1973         | 183,95     | 27       | 1 | 1.413,61   |
|     | <i>Offshore&lt;400m</i>            | 1990         | 516,04     | 27       | 1 | 2.286,69   |
|     | <i>Offshore&gt;400m</i>            | 2022         | 17.848,62  | 27       | 1 | 102.724,53 |

|  |                                   |      |           |   |   |            |
|--|-----------------------------------|------|-----------|---|---|------------|
|  | <b>Multi-Hubbert<br/>(k) (P5)</b> | 2022 | 17.848,84 | - | - | 106.424,83 |
|--|-----------------------------------|------|-----------|---|---|------------|

### Anexo 3

**Tabela com os resultados das estimações multi-Hubbert modificado para os três cenários considerados do pós-sal**

| <b>Anos</b> | <b>Produção<br/>média anual<br/>em milhares<br/>de barris por<br/>dia (Mbbbl/d)</b> | <b>Multi-Hubbert<br/>modificado em<br/>milhares de barris<br/>por dia (Mbbbl/d)<br/>P95</b> | <b>Multi-Hubbert<br/>modificado em<br/>milhares de barris<br/>por dia (Mbbbl/d)<br/>P50</b> | <b>Multi-Hubbert<br/>modificado em<br/>milhares de<br/>barris por dia<br/>(Mbbbl/d) P5</b> |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1954        | 3,75                                                                                | 26,29                                                                                       | 26,29                                                                                       | 26,29                                                                                      |
| 1955        | 6,40                                                                                | 31,13                                                                                       | 31,13                                                                                       | 31,13                                                                                      |
| 1956        | 12,11                                                                               | 36,74                                                                                       | 36,74                                                                                       | 36,74                                                                                      |
| 1957        | 29,26                                                                               | 43,22                                                                                       | 43,22                                                                                       | 43,22                                                                                      |
| 1958        | 55,05                                                                               | 50,63                                                                                       | 50,63                                                                                       | 50,63                                                                                      |
| 1959        | 69,99                                                                               | 59,04                                                                                       | 59,04                                                                                       | 59,04                                                                                      |
| 1960        | 86,37                                                                               | 68,46                                                                                       | 68,46                                                                                       | 68,46                                                                                      |
| 1961        | 98,20                                                                               | 78,88                                                                                       | 78,88                                                                                       | 78,88                                                                                      |
| 1962        | 92,04                                                                               | 90,23                                                                                       | 90,23                                                                                       | 90,23                                                                                      |
| 1963        | 97,14                                                                               | 102,35                                                                                      | 102,35                                                                                      | 102,35                                                                                     |
| 1964        | 91,70                                                                               | 115,02                                                                                      | 115,02                                                                                      | 115,02                                                                                     |
| 1965        | 96,00                                                                               | 127,90                                                                                      | 127,90                                                                                      | 127,90                                                                                     |
| 1966        | 117,00                                                                              | 140,58                                                                                      | 140,58                                                                                      | 140,58                                                                                     |
| 1967        | 147,00                                                                              | 152,56                                                                                      | 152,56                                                                                      | 152,56                                                                                     |
| 1968        | 161,00                                                                              | 163,30                                                                                      | 163,30                                                                                      | 163,30                                                                                     |
| 1969        | 176,00                                                                              | 172,26                                                                                      | 172,26                                                                                      | 172,26                                                                                     |
| 1970        | 167,00                                                                              | 183,06                                                                                      | 183,06                                                                                      | 183,06                                                                                     |
| 1971        | 175,00                                                                              | 188,61                                                                                      | 188,61                                                                                      | 188,61                                                                                     |
| 1972        | 171,00                                                                              | 191,82                                                                                      | 191,82                                                                                      | 191,82                                                                                     |
| 1973        | 174,00                                                                              | 192,85                                                                                      | 192,85                                                                                      | 192,85                                                                                     |
| 1974        | 181,00                                                                              | 192,11                                                                                      | 192,11                                                                                      | 192,11                                                                                     |
| 1975        | 178,00                                                                              | 190,29                                                                                      | 190,29                                                                                      | 190,29                                                                                     |
| 1976        | 173,00                                                                              | 188,37                                                                                      | 188,37                                                                                      | 188,37                                                                                     |
| 1977        | 167,00                                                                              | 187,55                                                                                      | 187,55                                                                                      | 187,55                                                                                     |
| 1978        | 166,00                                                                              | 189,26                                                                                      | 189,26                                                                                      | 189,26                                                                                     |
| 1979        | 172,00                                                                              | 195,10                                                                                      | 195,10                                                                                      | 195,10                                                                                     |
| 1980        | 188,00                                                                              | 206,77                                                                                      | 206,77                                                                                      | 206,77                                                                                     |
| 1981        | 220,00                                                                              | 225,97                                                                                      | 225,97                                                                                      | 225,97                                                                                     |
| 1982        | 268,00                                                                              | 254,10                                                                                      | 254,10                                                                                      | 254,10                                                                                     |

|             |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>1983</b> | 340,00   | 291,90   | 291,90   | 291,90   |
| <b>1984</b> | 473,00   | 404,42   | 553,97   | 585,50   |
| <b>1985</b> | 560,00   | 469,89   | 630,63   | 661,91   |
| <b>1986</b> | 591,00   | 539,10   | 711,28   | 741,98   |
| <b>1987</b> | 589,00   | 605,07   | 788,78   | 818,56   |
| <b>1988</b> | 573,00   | 659,78   | 854,90   | 883,36   |
| <b>1989</b> | 613,00   | 696,38   | 902,56   | 929,28   |
| <b>1990</b> | 650,00   | 711,73   | 928,31   | 952,80   |
| <b>1991</b> | 643,00   | 707,74   | 933,70   | 955,44   |
| <b>1992</b> | 652,00   | 690,89   | 924,76   | 943,21   |
| <b>1993</b> | 664,00   | 670,11   | 909,89   | 924,48   |
| <b>1994</b> | 693,00   | 654,25   | 897,35   | 907,50   |
| <b>1995</b> | 718,00   | 650,36   | 893,53   | 898,65   |
| <b>1996</b> | 807,00   | 663,08   | 902,30   | 901,86   |
| <b>1997</b> | 868,00   | 694,87   | 925,38   | 918,88   |
| <b>1998</b> | 1.003,00 | 746,63   | 962,89   | 949,95   |
| <b>1999</b> | 1.133,00 | 818,34   | 1.014,11 | 994,48   |
| <b>2000</b> | 1.276,64 | 909,42   | 1.077,89 | 1.051,53 |
| <b>2001</b> | 1.334,42 | 1.018,94 | 1.153,03 | 1.120,16 |
| <b>2002</b> | 1.503,24 | 1.145,63 | 1.238,36 | 1.199,56 |
| <b>2003</b> | 1.548,72 | 1.287,71 | 1.332,80 | 1.289,09 |
| <b>2004</b> | 1.533,51 | 1.442,72 | 1.435,38 | 1.388,31 |
| <b>2005</b> | 1.691,02 | 1.607,31 | 1.545,14 | 1.496,95 |
| <b>2006</b> | 1.783,31 | 1.777,04 | 1.661,14 | 1.614,83 |
| <b>2007</b> | 1.809,46 | 1.946,30 | 1.782,38 | 1.741,89 |
| <b>2008</b> | 1.881,09 | 2.108,39 | 1.907,77 | 1.878,08 |
| <b>2009</b> | 2.018,95 | 2.255,84 | 2.036,11 | 2.023,38 |
| <b>2010</b> | 2.126,92 | 2.380,86 | 2.166,04 | 2.177,74 |
| <b>2011</b> | 2.179,43 | 2.476,13 | 2.296,07 | 2.341,08 |
| <b>2012</b> | 2128,4   | 2.535,59 | 2.424,56 | 2.513,23 |
| <b>2013</b> | -        | 2.555,24 | 2.549,72 | 2.693,93 |
| <b>2014</b> | -        | 2.533,68 | 2.669,69 | 2.882,79 |
| <b>2015</b> | -        | 2.472,31 | 2.782,52 | 3.079,30 |
| <b>2016</b> | -        | 2.375,12 | 2.886,26 | 3.282,78 |
| <b>2017</b> | -        | 2.248,13 | 2.979,01 | 3.492,38 |
| <b>2018</b> | -        | 2.098,56 | 3.058,98 | 3.707,04 |
| <b>2019</b> | -        | 1.934,05 | 3.124,54 | 3.925,53 |
| <b>2020</b> | -        | 1.761,86 | 3.174,34 | 4.146,40 |
| <b>2021</b> | -        | 1.588,39 | 3.207,30 | 4.368,00 |
| <b>2022</b> | -        | 1.418,86 | 3.222,69 | 4.588,50 |
| <b>2023</b> | -        | 1.257,20 | 3.220,19 | 4.805,88 |
| <b>2024</b> | -        | 1.106,13 | 3.199,83 | 5.017,95 |
| <b>2025</b> | -        | 967,27   | 3.162,06 | 5.222,42 |
| <b>2026</b> | -        | 841,41   | 3.107,71 | 5.416,92 |
| <b>2027</b> | -        | 728,62   | 3.037,92 | 5.599,01 |
| <b>2028</b> | -        | 628,52   | 2.954,13 | 5.766,32 |
| <b>2029</b> | -        | 540,38   | 2.858,00 | 5.916,52 |
| <b>2030</b> | -        | 463,30   | 2.751,35 | 6.047,46 |

|      |   |        |          |          |
|------|---|--------|----------|----------|
| 2031 | - | 396,27 | 2.636,08 | 6.157,16 |
| 2032 | - | 338,25 | 2.514,13 | 6.243,94 |
| 2033 | - | 288,23 | 2.387,38 | 6.306,41 |
| 2034 | - | 245,25 | 2.257,64 | 6.343,58 |
| 2035 | - | 208,42 | 2.126,60 | 6.354,83 |
| 2036 | - | 176,94 | 1.995,77 | 6.339,99 |
| 2037 | - | 150,08 | 1.866,49 | 6.299,29 |
| 2038 | - | 127,20 | 1.739,93 | 6.233,40 |
| 2039 | - | 107,75 | 1.617,04 | 6.143,37 |
| 2040 | - | 91,22  | 1.498,60 | 6.030,64 |
| 2041 | - | 77,19  | 1.385,21 | 5.896,92 |
| 2042 | - | 65,29  | 1.277,31 | 5.744,22 |
| 2043 | - | 55,21  | 1.175,18 | 5.574,73 |
| 2044 | - | 46,67  | 1.079,01 | 5.390,78 |
| 2045 | - | 39,45  | 988,84   | 5.194,76 |
| 2046 | - | 33,33  | 904,63   | 4.989,08 |
| 2047 | - | 28,16  | 826,29   | 4.776,12 |
| 2048 | - | 23,79  | 753,64   | 4.558,16 |
| 2049 | - | 20,10  | 686,48   | 4.337,36 |
| 2050 | - | 16,97  | 624,54   | 4.115,70 |
| 2051 | - | 14,33  | 567,58   | 3.895,00 |
| 2052 | - | 12,10  | 515,29   | 3.676,88 |
| 2053 | - | 10,22  | 467,40   | 3.462,74 |
| 2054 | - | 8,63   | 423,62   | 3.253,79 |
| 2055 | - | 7,29   | 383,65   | 3.051,03 |
| 2056 | - | 6,15   | 347,21   | 2.855,28 |
| 2057 | - | 5,19   | 314,05   | 2.667,17 |
| 2058 | - | 4,39   | 283,90   | 2.487,16 |
| 2059 | - | 3,70   | 256,51   | 2.315,59 |
| 2060 | - | 3,13   | 231,66   | 2.152,63 |
| 2061 | - | 2,64   | 209,14   | 1.998,37 |
| 2062 | - | 2,23   | 188,73   | 1.852,77 |
| 2063 | - | 1,88   | 170,26   | 1.715,73 |
| 2064 | - | 1,59   | 153,55   | 1.587,06 |
| 2065 | - | 1,34   | 138,45   | 1.466,55 |
| 2066 | - | 1,13   | 124,79   | 1.353,90 |
| 2067 | - | 0,95   | 112,47   | 1.248,82 |
| 2068 | - | 0,81   | 101,33   | 1.150,97 |
| 2069 | - | 0,68   | 91,29    | 1.059,99 |
| 2070 | - | 0,57   | 82,22    | 975,54   |
| 2071 | - | 0,48   | 74,05    | 897,26   |
| 2072 | - | 0,41   | 66,68    | 824,78   |
| 2073 | - | 0,35   | 60,04    | 757,75   |
| 2074 | - | 0,29   | 54,05    | 695,83   |
| 2075 | - | 0,25   | 48,65    | 638,68   |
| 2076 | - | 0,21   | 43,79    | 585,99   |
| 2077 | - | 0,18   | 39,42    | 537,44   |
| 2078 | - | 0,15   | 35,47    | 492,74   |

|             |   |      |       |        |
|-------------|---|------|-------|--------|
| <b>2079</b> | - | 0,13 | 31,92 | 451,61 |
| <b>2080</b> | - | 0,11 | 28,73 | 413,80 |
| <b>2081</b> | - | 0,09 | 25,85 | 379,05 |
| <b>2082</b> | - | 0,08 | 23,26 | 347,14 |
| <b>2083</b> | - | 0,06 | 20,93 | 317,84 |
| <b>2084</b> | - | 0,05 | 18,83 | 290,95 |
| <b>2085</b> | - | 0,05 | 16,94 | 266,29 |

#### Anexo 4

**Tabela dos erros médios para cada cenário estimado**

| <b>Anos</b> | <b>Produção<br/>média anual<br/>em milhares<br/>de barris por<br/>dia (Mbbbl/d)</b> | <b>Erros anuais<br/>médios<br/>considerados em<br/>milhares de barris<br/>por dia (Mbbbl/d)<br/>P95</b> | <b>Erros anuais<br/>médios<br/>considerados em<br/>milhares de barris<br/>por dia (Mbbbl/d)<br/>P50</b> | <b>Erros anuais<br/>médios<br/>considerados em<br/>milhares de<br/>barris por dia<br/>(Mbbbl/d) P5</b> |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1954</b> | 3,75                                                                                | 22,54                                                                                                   | 22,54                                                                                                   | 22,54                                                                                                  |
| <b>1955</b> | 6,40                                                                                | 24,73                                                                                                   | 24,73                                                                                                   | 24,73                                                                                                  |
| <b>1956</b> | 12,11                                                                               | 24,63                                                                                                   | 24,63                                                                                                   | 24,63                                                                                                  |
| <b>1957</b> | 29,26                                                                               | 13,96                                                                                                   | 13,96                                                                                                   | 13,96                                                                                                  |
| <b>1958</b> | 55,05                                                                               | - 4,41                                                                                                  | - 4,41                                                                                                  | - 4,41                                                                                                 |
| <b>1959</b> | 69,99                                                                               | - 10,95                                                                                                 | - 10,95                                                                                                 | - 10,95                                                                                                |
| <b>1960</b> | 86,37                                                                               | - 17,91                                                                                                 | - 17,91                                                                                                 | - 17,91                                                                                                |
| <b>1961</b> | 98,20                                                                               | - 19,32                                                                                                 | - 19,32                                                                                                 | - 19,32                                                                                                |
| <b>1962</b> | 92,04                                                                               | - 1,81                                                                                                  | - 1,81                                                                                                  | - 1,81                                                                                                 |
| <b>1963</b> | 97,14                                                                               | 5,21                                                                                                    | 5,21                                                                                                    | 5,21                                                                                                   |
| <b>1964</b> | 91,70                                                                               | 23,32                                                                                                   | 23,32                                                                                                   | 23,32                                                                                                  |
| <b>1965</b> | 96,00                                                                               | 31,90                                                                                                   | 31,90                                                                                                   | 31,90                                                                                                  |
| <b>1966</b> | 117,00                                                                              | 23,58                                                                                                   | 23,58                                                                                                   | 23,58                                                                                                  |
| <b>1967</b> | 147,00                                                                              | 5,56                                                                                                    | 5,56                                                                                                    | 5,56                                                                                                   |
| <b>1968</b> | 161,00                                                                              | 2,30                                                                                                    | 2,30                                                                                                    | 2,30                                                                                                   |
| <b>1969</b> | 176,00                                                                              | - 3,74                                                                                                  | - 3,74                                                                                                  | - 3,74                                                                                                 |
| <b>1970</b> | 167,00                                                                              | 16,06                                                                                                   | 16,06                                                                                                   | 16,06                                                                                                  |
| <b>1971</b> | 175,00                                                                              | 13,61                                                                                                   | 13,61                                                                                                   | 13,61                                                                                                  |
| <b>1972</b> | 171,00                                                                              | 20,82                                                                                                   | 20,82                                                                                                   | 20,82                                                                                                  |
| <b>1973</b> | 174,00                                                                              | 18,85                                                                                                   | 18,85                                                                                                   | 18,85                                                                                                  |
| <b>1974</b> | 181,00                                                                              | 11,11                                                                                                   | 11,11                                                                                                   | 11,11                                                                                                  |
| <b>1975</b> | 178,00                                                                              | 12,29                                                                                                   | 12,29                                                                                                   | 12,29                                                                                                  |
| <b>1976</b> | 173,00                                                                              | 15,37                                                                                                   | 15,37                                                                                                   | 15,37                                                                                                  |
| <b>1977</b> | 167,00                                                                              | 20,55                                                                                                   | 20,55                                                                                                   | 20,55                                                                                                  |
| <b>1978</b> | 166,00                                                                              | 23,26                                                                                                   | 23,26                                                                                                   | 23,26                                                                                                  |

|      |          |          |          |          |
|------|----------|----------|----------|----------|
| 1979 | 172,00   | 23,10    | 23,10    | 23,10    |
| 1980 | 188,00   | 18,77    | 18,77    | 18,77    |
| 1981 | 220,00   | 5,97     | 5,97     | 5,97     |
| 1982 | 268,00   | - 13,90  | - 13,90  | - 13,90  |
| 1983 | 340,00   | - 48,10  | - 48,10  | - 48,10  |
| 1984 | 473,00   | - 68,58  | 80,97    | 112,50   |
| 1985 | 560,00   | - 90,11  | 70,63    | 101,91   |
| 1986 | 591,00   | - 51,90  | 120,28   | 150,98   |
| 1987 | 589,00   | 16,07    | 199,78   | 229,56   |
| 1988 | 573,00   | 86,78    | 281,90   | 310,36   |
| 1989 | 613,00   | 83,38    | 289,56   | 316,28   |
| 1990 | 650,00   | 61,73    | 278,31   | 302,80   |
| 1991 | 643,00   | 64,74    | 290,70   | 312,44   |
| 1992 | 652,00   | 38,89    | 272,76   | 291,21   |
| 1993 | 664,00   | 6,11     | 245,89   | 260,48   |
| 1994 | 693,00   | - 38,75  | 204,35   | 214,50   |
| 1995 | 718,00   | - 67,64  | 175,53   | 180,65   |
| 1996 | 807,00   | - 143,92 | 95,30    | 94,86    |
| 1997 | 868,00   | - 173,13 | 57,38    | 50,88    |
| 1998 | 1.003,00 | - 256,37 | - 40,11  | - 53,05  |
| 1999 | 1.133,00 | - 314,66 | - 118,89 | - 138,52 |
| 2000 | 1.276,64 | - 367,22 | - 198,75 | - 225,11 |
| 2001 | 1.334,42 | - 315,48 | - 181,39 | - 214,26 |
| 2002 | 1.503,24 | - 357,62 | - 264,89 | - 303,69 |
| 2003 | 1.548,72 | - 261,01 | - 215,92 | - 259,63 |
| 2004 | 1.533,51 | - 90,79  | 22,54    | 22,54    |
| 2005 | 1.691,02 | - 83,71  | 24,73    | 24,73    |
| 2006 | 1.783,31 | - 6,27   | 24,63    | 24,63    |
| 2007 | 1.809,46 | 136,83   | 13,96    | 13,96    |
| 2008 | 1.881,09 | 227,30   | - 4,41   | - 4,41   |
| 2009 | 2.018,95 | 236,89   | - 10,95  | - 10,95  |
| 2010 | 2.126,92 | 253,94   | - 17,91  | - 17,91  |
| 2011 | 2.179,43 | 296,70   | - 19,32  | - 19,32  |
| 2012 | 2128,4   | 407,19   | - 1,81   | - 1,81   |

## Anexo 5

**Dados estimados supondo uma curva multi-Hubbert modificado  
(considerando reservas do pré-sal)**

|  | Ciclos         | Tm<br>(anos) | Pm(Mbbl/d) | C (anos) | k    | URR(MMbbl) |
|--|----------------|--------------|------------|----------|------|------------|
|  | <b>Onshore</b> | 1972         | 183.95     | 37,2     | 1,00 | 1.413,61   |

|     |                                |      |          |       |      |            |
|-----|--------------------------------|------|----------|-------|------|------------|
| 30  | <i>Offshore</i> <400m          | 1989 | 516.04   | 21,15 | 0,99 | 2.286,69   |
|     | <i>Offshore</i> >400m          | 2022 | 3.222,57 | 64,61 | 0,94 | 44.053,53  |
|     | Pré-sal                        | 2037 | 2.178,25 | 64,61 | 0,94 | 30.000,00  |
|     | <b>Multi-Hubbert (k) (P95)</b> | 2028 | 4.715,16 | -     | -    | 77.753,83  |
| 50  | <i>Onshore</i>                 | 1972 | 183.95   | 37,2  | 1,00 | 1.413,61   |
|     | <i>Offshore</i> <400m          | 1989 | 516.04   | 21,15 | 0,99 | 2.286,69   |
|     | <i>Offshore</i> >400m          | 2022 | 3.222,57 | 64,61 | 0,94 | 44.053,53  |
|     | Pré-sal                        | 2043 | 3.630,41 | 64,61 | 0,94 | 50.000,00  |
|     | <b>Multi-Hubbert (k) (P50)</b> | 2035 | 5.239,30 | -     | -    | 97.753,83  |
| 100 | <i>Onshore</i>                 | 1972 | 183.95   | 37,2  | 1,00 | 1.413,61   |
|     | <i>Offshore</i> <400m          | 1989 | 516.04   | 21,15 | 0,99 | 2.286,69   |
|     | <i>Offshore</i> >400m          | 2022 | 3.222,57 | 64,61 | 0,94 | 44.053,53  |
|     | Pré-sal                        | 2050 | 7,260.83 | 64,61 | 0,94 | 100.000,00 |
|     | <b>Multi-Hubbert (k) (P5)</b>  | 2048 | 8.004,34 | -     | -    | 147.753,83 |

## Anexo 6

### A Regra de Hotelling

A partir da função intertemporal de preços (vide cap. 2.2), HOTELLING (1931) expressa matematicamente que a demanda de um recurso deveria ser igual a zero, quando o mesmo chegasse ao seu tempo de exaustão. Ou seja, dada uma função de quantidade consumida no tempo  $q=f(P,t)$ , a integral desta função no decorrer de um tempo inicial 0 ao tempo de exaustão do produto ( $T$ ) resultará no consumo completo da reserva inicial ( $R$ ), conhecida. Dessa forma, em ( $T$ ) o preço do produto atingiria um valor o qual ninguém pagaria por ele, finito ou infinito dependendo das condições iniciais, e dessa forma a demanda no tempo ( $T$ ) será igual a zero e coincidirá com a exaustão da reserva. Em outras palavras, HOTELLING (1931) mostra com essa simples

formulação que o preço do produto depende de um fator de exaustão e que a evolução temporal deste preço não deveria se manter estática aos custos simples de extração, e sim ser dinâmica, devido à existência desse fator de escassez: dessa forma, o produto deveria ter uma vida útil maior e atingiria a exaustão junto com a falta de interesse por ele.

Dada a evolução de preços devido ao esgotamento dos recursos exauríveis, HOTELLING (1931) infere implicações a respeito de como seria o comportamento do mercado sendo submetido a diferentes formas administrativas dos recursos exauríveis. A primeira forma de administração pensada foi a de maximização de um valor social e a interferência do Estado.

Também submetida à condição de concorrência perfeita, a maximização do valor social é proposta para se encontrar um valor social do recurso. Em unidade de tempo, essa quantidade é definida sendo:

$$u(q) = \int_0^q p(q) dq \quad \text{Eq. 46}$$

Sendo  $u(q)$  uma medida de bem-estar, partindo da interpretação econômica de que bem-estar está associado ao consumo (VARIAN, 2003). Então HOTELLING (1931) propôs que, em uma unidade de tempo definida  $t$ ,  $u$  seria função da quantidade do produto produzida e consumida  $q(t)$ . O autor ainda propõe o aproveitamento futuro que deverá ser descontado por uma taxa de desconto  $\gamma$ . Considerando a reserva total  $R$  fixa e trazendo o consumo futuro a valor presente, a formulação de HOTELLING (1931) propõe maximizar:

$$V = \int_0^T u[q(t)] e^{-\gamma t} dt \quad \text{Eq. 47}$$

Sujeito a:

$$\int_0^T q(t) dt \leq R \quad \text{Eq. 48}$$

A interpretação da Eq. 48 está em garantir o máximo de bem-estar ( $V$ ) intertemporalmente, dado um estoque finito e conhecido do recurso. Porém, um problema foi notado por HOTELLING (1931), ao testar esta hipótese: o desperdício nas formas de exploração e consumo. Dado que o comportamento de um produtor em concorrência perfeita acontece por uma preferência pelo presente (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007), HOTELLING (1931) teorizou que, para a maximização da utilidade social, havendo explorações desordenadas e descobertas

inesperadas, haveria inúmeros proprietários que iriam produzir rapidamente seus minérios<sup>51</sup>, pois, se assim não fizessem, seus vizinhos o fariam<sup>52</sup>.

Outro efeito também observado por Hotelling seria o de grandes lucros com as descobertas e exploração dos minérios por alguns proprietários privados, o que em sua interpretação não corresponderia a uma maximização do valor social. É partindo da intenção de ajustar o nível de exploração a um ideal social, que o autor revela a necessidade da intervenção de um “gestor”, no caso o Estado. Porém, mesmo com a gestão das reservas centralizada, HOTELLING (1931) previa problemas com a utilização da matéria prima; propõe, assim, uma política pública para os recursos exauríveis submetendo sua evolução de preços à taxa de juros do mercado: sob esta taxa que os mesmos deveriam ser valorados intertemporalmente.

Após ter avaliado como poderia ser o sistema de exploração visando o bem-estar social, HOTELLING (1931) passa a analisar a utilização das reservas de recursos exauríveis, sob diferentes estruturas de mercado. Para essa análise o autor opta por fazer uma teorização sobre a administração de um mercado monopolista, onde apenas um produtor é responsável por toda a reserva.

Uma empresa em monopólio age em condições diferentes da concorrência perfeita, pois, para ela, os preços não são dados pelo mercado, mas sim podem ser influenciados pelo produtor a fim de maximizar seus lucros (VARIAN, 2003). A função de receita do produtor monopolista se comporta conforme a equação  $y=p(q)q$ , sendo  $q$  a quantidade e  $p(q)$  a curva de demanda inversa<sup>53</sup> do mercado, com um custo marginal dado por  $c(y)$  o problema de maximização de lucros de um monopolista se dá pela forma  $Max (y-c(y))$ . Em HOTELLING (1931), é desconsiderada qualquer variação de custos, por isso para resolver o problema do produtor monopolista o autor se utiliza apenas da função de receita  $y=p(q)q$ , que é capaz de variar tanto em  $p$  quanto em  $q$ ,

---

<sup>51</sup> Esse fato foi observado no início das explorações de petróleo nos EUA e foi denominada de regra de captura, tal regra foi definida por Robert E. Hardwick como sendo: “o proprietário da superfície em que um poço foi perfurado também tinha a propriedade de todo o petróleo extraído, mesmo que este recurso fosse obtido por meio da migração do petróleo localizado abaixo de outra superfície”. Sendo assim, era legalmente possível drenar desproporcionalmente ou reduzir a produção de poços adjacentes localizados em propriedades vizinhas (LUCIANA PALMEIRA BRAGA, 2012).

<sup>52</sup> Esse fato pode ser diagnosticado devido ao efeito informação presente em campos de petróleo e minérios diversos, onde se em uma perfuração foi encontrado petróleo, muito provavelmente haverá petróleo em uma região vizinha, pois os campos costumam abranger extensas áreas. O efeito informação é uma das hipóteses fundamentais do modelo de Hubbert e será detalhado no capítulo 3.

<sup>53</sup> A curva de demanda inversa faz parte da Lei Geral da Demanda, que é uma relação inversa e proporcional entre a quantidade procurada e o preço deste bem (VARIAN, 2003).

onde um aumenta se o outro diminui. Partindo dessas condições o problema do produtor monopolista de um recurso exaurível é maximizar uma quantidade  $q$  extraída no tempo  $t$ , com um formato como apresentado pela Eq. 50:

$$Max(q) = \int_0^{\infty} qp(q)e^{-\gamma t} dt \quad \text{Eq. 49}$$

Sujeito à condição:

$$\int_0^{\infty} q dt = R \quad \text{Eq. 50}$$

Foi a partir da formulação de maximização (Eq. 50) e da condição de que a quantidade explorada não poderá exceder a quantidade total de reserva  $R$  (Eq. 51), já conhecida, que HOTELLING (1931) obtém o valor de uma mina no monopólio. O autor conclui que a produção sob a condição de monopólio proporciona um retardamento do consumo. Mas, segundo o próprio autor, essa forma de gestão não confere uma melhora social, já que os lucros de um monopolista vêm de a sua capacidade de cobrar um preço maior por um produto do que as empresas em concorrência perfeita, produzindo, assim, um volume de produtos menor (VARIAN, 2003). Esse fato retarda a produção, mas causa uma perda de benefício social, auferindo uma renda de escassez menor.

Finalmente, Hotelling propõe o curso ótimo de exploração de uma mina de recursos exauríveis, onde seguiria seus postulados anteriormente apresentados, adaptando-os a uma nova forma de administração. Nesse momento o autor diferencia o modelo proposto na seção de monopólio e, ao invés de utilizar a capacidade do monopolista de atribuir preços, o autor utiliza novamente as hipóteses da concorrência perfeita; assim, diversos proprietários privados maximizam suas receitas e o retorno social por unidade de tempo é obtido:

$$u = \int_0^q p(x, q, t) dq, \quad \text{Eq. 51}$$

Conforme a Eq. 52 o autor assume que o preço oferecido ao mercado está em função de  $x$ , que é a quantidade consumida até um tempo  $t_x$ ,  $q$  a quantidade que será demandada e o tempo  $t$ . É partindo desse retorno social, que o autor descreve um caminho intertemporal do ótimo social, onde seria capaz de encontrar a evolução dos preços e uma taxa ótima de extração.

Com a apresentação do modelo clássico de HOTELLING (1931), é possível apresentar interpretações sobre este modelo feita por autores como KRAUTKRAEMER (1998), que definiu o modelo de Hotelling como sendo uma alocação intertemporal de

um estoque finito conhecido de um recurso não renovável, onde o produtor escolhe uma trajetória temporal para a extração do recurso, representada por  $q(t)$ , que maximiza o valor presente do benefício líquido da extração, sujeito à restrição da extração acumulada não ser maior que a dotação inicial do recurso. REYNOLDS & BAEK (2012) enfatizam cinco principais determinantes para o modelo de Hotelling dos recursos não renováveis, tais como: o custo marginal de extração; o preço de uma próxima melhor alternativa tecnológica (*backstop technology*); a demanda; a base de reserva  $R$  e a taxa de desconto  $\gamma$ . Partindo do conhecimento dessas variáveis, se é possível encontrar o caminho de preços e a taxa ótima de extração.

Assim, partindo da suposição de a taxa de lucro dada por HOTELLING (1931)  $p(t)q(t)$  ser o benefício bruto dos produtores  $B(q(t), R(t))$ , KRAUTKRAEMER (1998); SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) e BLACK (1998) apresentaram quase a mesma formulação para resolver o problema de maximização de lucro do produtor em concorrência perfeita, sendo que KRAUTKRAEMER (1998) e BLACK (1998) se diferenciam da solução de SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) pela dependência do custo estar sobre a quantidade produzida e as reservas remanescentes  $C(q(t); R(t))$ <sup>54</sup>. Assim, conforme a sua interpretação do modelo clássico de Hotelling para concorrência pura e perfeita, a função-objetivo que maximiza o valor presente apresentada por SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) é:

$$\text{Max } (q) = \int_0^T [p(t)q(t) - c(t)]e^{-\gamma t} dt \quad \text{Eq. 52}$$

Sujeito à :

$$\int_0^\infty q dt = R \quad \text{Eq. 53}$$

Sendo,  $q$  a quantidade de petróleo produzido em  $t$ ;  $p$  seu preço;  $C$  o custo de produção,  $\gamma$  a taxa de desconto;  $R$  o tamanho da reserva em  $t$ .

Para a compreensão de os preços serem submetidos à taxa de desconto, KRAUTKRAEMER (1998) faz uma extrapolação Hamiltoniana do ritmo ótimo de exploração, onde relaciona o fator do preço oculto com a taxa de mercado, por uma série de derivações. Uma interpretação matemática mais simples foi elaborada por

---

<sup>54</sup> Para introduzir essa suposição, KRAUTKRAEMER (1998) e BLACK (1998) refutaram a hipótese de Hotelling segundo a qual os custos marginais evoluem apenas devido à taxa de desconto do mercado, argumentando a queda da pressão natural de um reservatório, quando o mesmo é continuamente explorado (essa é uma das críticas ao modelo clássico de Hotelling, que será abordada adiante).

SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007), que fizeram a seguinte observação: tem-se que o produtor busca maximizar a sequência temporal de lucros atualizados sujeita ao esgotamento das reservas. O ponto de equilíbrio estático e dinâmico é a permanente igualdade do valor de extração e o de não extração.

- 1- Se a variação do preço com o tempo for maior do que a taxa de desconto, a produção é postergada:  $dp/dt > \gamma$ .
- 2- Se a variação do preço com o tempo for menor do que a taxa de desconto, a produção é adiantada:  $dp/dt < \gamma$ .
- 3- Logo, a condição de equilíbrio, definido na igualdade entre valor de extração e de não extração, se redefine na igualdade entre:  $dp/dt = \gamma$ .

Ou seja, o preço do recurso se move no tempo, ao ritmo da taxa de desconto.

Foi partindo da equação de maximização de produção e da taxa de aumento de preços relacionada com a taxa de desconto do mercado, que SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007); BLACK (1998); LIN & WAGNE (2007) e KRAUTKRAEMER (1998) acharam como resultado que existe, para recursos finitos, uma diferença entre receita marginal ( $RMg$ ) e custo marginal ( $CMg$ ), mesmo em um mercado sob estrutura de concorrência perfeita. Para recursos renováveis, as hipóteses econômicas dessa estrutura de mercado levam a que o preço de equilíbrio esteja no ponto em que a curva de receita marginal cruza a curva de custo marginal (VARIAN, 2003). Assim essa diferença foi denominada por SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER (2007) como sendo o custo de oportunidade intertemporal para recursos exauríveis, e pode ser expressa por (solução do problema matemático das Eq. 8 e Eq. 9):

$$p - CMg = \pi Mg(0)e^{\gamma t} \quad \text{Eq. 54}$$

Sendo  $\pi Mg(0)$  o lucro marginal no instante inicial.

Na Eq. 10 o termo à direita na igualdade indica precisamente a evolução da renda de escassez ou custo de uso. Como se nota, o custo econômico do uso (i.e., o custo de oportunidade de se utilizar o recurso num dado momento) cresce com o tempo, assim como o custo marginal (i.e., segundo a hipótese de Hotelling, onde a extração se dá a partir dos recursos de menor custo e não devido a uma taxa física crescente de extração) (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007 e KRAUTKRAEMER, 1987). Este resultado se assemelha muito à Eq. 1, desenvolvida por HOTELLING (1931),

exceto pelo fato de que este autor desconsidera os custos marginais de extração em seu trabalho.

O preço oculto identificado por Hotelling resultou em uma nova forma de relação com os recursos escassos, onde a cobrança do custo de escassez denominado de *royalties* (PEARCE E TURNER, 1990) foi introduzida ao sistema produtivo desses recursos. Aliado a essa nova forma de tratar esses bens, Hotelling proveu um novo ferramental às empresas produtoras, no sentido de as mesmas poderem explicar alguns acontecimentos do setor, como a estabilidade de preços do petróleo nos anos 1960 e 1970 (FISHELSON, 1983).

Apesar de ter sido um modelo inovador, a teoria clássica de Hotelling possui falhas fundamentais em sua concepção. Críticas e propostas de adequação do modelo aos dados observados são constantes até os dias de hoje (LIN & WAGNE, 2007 e HART & SPIRO, 2011); críticas desenvolvidas, como, por exemplo, por FISHELSON (1983) que propôs que uma evolução tecnológica deveria afetar a formação dos preços do petróleo, e GAUDET & HOWITT (1987), que propuseram que uma modificação da propensão ao risco dos produtores poderia modificar a dinâmica Hotellingana, caso houvesse alguma covariância entre a taxa de preço líquido e a taxa de juros do mercado, fizeram essa teoria ser repensada em artigos mais recentes (BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998; LIN & WAGNE, 2007; HART & SPIRO, 2011; SMIT, 2011 e REYNOLDS & BAEK, 2012).

Mas notoriamente existem três grandes limitações a respeito dos conceitos fundamentais elaborados por Hotelling, que são relatados pela maioria dos autores, pró ou contra a teoria Hotellingana, como sendo as principais falhas do modelo à adequação aos dados observados no Século XX para exploração e exploração do petróleo, dentre elas estão:

A primeira a ser citada é o problema dos custos marginais crescentes. Na interpretação de BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998 e SMIT (2011), haveria uma perda de pressão nos poços à medida que os mesmos são explorados, conduzindo, assim, a um contínuo reajuste dos custos marginais de exploração, pois, para um poço de petróleo é entendido que: para cada unidade de óleo retirada do poço, mais difícil se é retirar a unidade seguinte, causando custos maiores de extração por cada unidade de

petróleo que será produzida (retirada)<sup>55</sup>. É ainda afirmado que a exploração dos poços de petróleo não seguiria outro pressuposto de Hotelling, aquele segundo o qual as explorações deveriam ser realizadas de acordo com os menores custos de exploração<sup>56</sup>. Esses autores, dentre outros, justificam essa afirmação argumentando a existência de estratégias comerciais<sup>57</sup>, questões políticas ou por questão de acesso geológico.

A segunda falha do modelo está definida na desconsideração do desenvolvimento tecnológico. Essa não seria apenas devido ao fato apresentado por FISHELSON (1983) e outros autores, segundo o qual diferentes tecnologias poderiam modificar as necessidades de demanda ou as formas da oferta. Tal falha estaria também em uma hipótese do modelo clássico de Hotelling, segundo a qual o esgotamento das reservas coincidiria com a ausência da demanda. Essa hipótese não condiz com a realidade segundo a qual o progresso tecnológico deverá conduzir não apenas a novas formas de exploração e uso das reservas de petróleo, mas também acarretará na provável substituição entre as fontes energéticas: assim, no limite dos preços ou preço-teto, o petróleo deverá ser substituído por outra tecnologia “*Backstop Technology*” (BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998; SMIT, 2011 e ADELMAN, 2002).

Por fim se tem o postulado mais amplamente criticado de Hotelling, que é o do conhecimento das reservas totais no instante inicial da produção (BLACK, 1998; KRAUTKRAEMER, 1998; SMIT, 2011 e SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; HART & SPIRO, 2011; REHRL & FRIEDRICH, 2006 e REYNOLDS & BAEK, 2012). Como já visto, o conceito de reservas é continuamente revisto devido às constantes modificações nos preços e nas tecnologias relacionados ao petróleo. Arelado a esse fato estão os conhecimentos geológicos obtidos até hoje, a respeito da determinação de quantias de reservas. Estes conhecimentos possuem níveis de incertezas impossíveis de serem desprezados, associando, assim, todo o estudo de reservas a probabilidades (SZKLO, MACHADO & SCHAEFFER, 2007; REYNOLDS & BAEK, 2012 e HART & SPIRO, 2011).

Assim, HART & SPIRO (2011) concluem que: a principal variável Hotellingana, a renda de escassez, historicamente exerce pouca influência em todos os

---

<sup>55</sup> Fato que pode ter como interpretação o efeito de depleção proposto por Hubbert, interpretação que será descrita no capítulo 3.

<sup>56</sup> Em ordem de acessibilidade, os recursos mais acessíveis, ou os mais baratos, deveriam estar disponíveis primeiro. (HOTELLING, 1931)

<sup>57</sup> Como pôde ser identificado nos Estados Unidos nas décadas 1950 e 1960 (Ver: KAUFMANN; KARADELOGLOU & MAURO, 1998).

resultados de determinação do mercado; a renda de escassez não é um fator dominante na determinação dos preços do petróleo e do carvão; e que é muito pouco provável que este fator terá qualquer influência sobre esses preços, nas próximas décadas.

Por sua vez, REYNOLDS & BAEK (2012), intrigados com a constatação de que haveria mais literatura científica utilizando os conceitos Hotellinganos, relativamente à literatura com uso da modelagem de Hubbert, conceberam um teste de significância, buscando dimensionar o quanto à taxa de desconto de Hotelling seria capaz de explicar os preços do petróleo, em contrapartida, a uma curva simples de Hubbert. Utilizando um ferramental denominado “An autoregressive distributed lag (ARDL)”, REYNOLDS & BAEK (2012) encontraram que o mais importante resultado de Hotelling, a taxa de desconto, tinha muito pouco efeito sobre a determinação dos preços, enquanto o indicador de Hubbert causou um efeito contrário. O resultado a respeito de Hotelling aparentou ser muito similar ao encontrado por HART & SPIRO (2011), indicando, assim, uma fraqueza da teoria Hotellingana para explicar a evolução de preço de petróleo.

Portanto, a partir dessas constatações impende indagar se a teoria Hotellingana, apesar de ser um marco na teoria a respeito dos recursos exauríveis, e ser útil na análise da produção de campos já descobertos, possui alguma significância para estimativas futuras, quando relacionadas ao ritmo de extração de petróleo. Assim, esta dissertação se propõe a apresentar outros ferramentais, com o objetivo de encontrar a ferramenta mais adequada às necessidades de estimação presentes nesta dissertação.